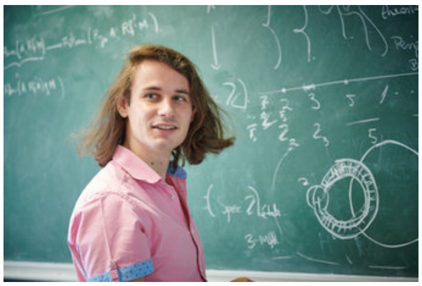
Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Universidad de Nariño
Nivel III (Grados 10 y 11)
Entrenamiento No. 7: Álgebra (Profesores)

> *Sé el cambio que quieres ver en el mundo.*

Mahatma Gandhi, *Pacifista, político, pensador y abogado hinduista indio.*, 2 de octubre de 1869 – 30 de enero de 1948.

1. Peter Scholze (1987-)



www.mpg.de

Scholze es un matemático e investigador alemán conocido por su trabajo en geometría algebraica. Ha sido profesor en la Universidad de Bonn desde 2012 y director del Instituto Max Planck de Matemáticas desde 2018. El joven investigador es considerado como una de las estrellas actuales en el mundo de las matemáticas, investiga en el ámbito de la geometría algebraica y busca conexiones entre diversos campos de las ciencias matemáticas. En el 2018 recibió la Medalla Fields, que se considera el más alto honor profesional en matemáticas.

2. Problema resuelto

(MindDecisions, 2019) Calcular $\sqrt[3]{8+3\sqrt{21}}+\sqrt[3]{8-3\sqrt{21}}=?$.

a) 3 b) 2 c) $\boxed{1}$ d) 0 e) -1

Respuesta: c).

Solución. Recuerda que:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b). \tag{1}$$

El objetivo es determinar el valor de $a+b$, para

$$a=\sqrt[3]{8+3\sqrt{21}} \quad \text{y} \quad b=\sqrt[3]{8-3\sqrt{21}}.$$

Luego, se tiene que:

$$a^3+b^3=8+3\sqrt{21}+8-3\sqrt{21}=16. \tag{2}$$

Además,

$$\begin{aligned} a^3\cdot b^3=(a\cdot b)^3&=(8+3\sqrt{21})\cdot(8-3\sqrt{21})\\ &=8^2-(3\sqrt{21})^2\\ &=-125, \end{aligned}$$

de donde

$$a\cdot b=-5 \tag{3}$$

Así, al sustituir (2) y (3) en la ecuación (1) se obtiene:

$$(a+b)^3=16-15(a+b).$$

Usando el cambio de variable $x=a+b$ obtenemos la ecuación:

$$x^3+15x-16=0$$

Al agrupar términos, se tiene:

$$(x^3 - 1) + (15x - 15) = 0$$

Factorizando, en el primer término por diferencia de cubos y en el segundo por factor común, se obtiene:

$$(x-1)(x^2+x+1) + 15(x-1) = 0.$$

Luego dado que $x - 1$ es un factor común entre sus términos, se tiene

$$(x-1)(x^2+x+16) = 0.$$

De donde, se observa que la única solución real es $x = 1$. Luego, el valor de $a + b$, viene dado por:

$$x = a + b = \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}} = 1.$$

□

3. Problemas Propuestos

1. (OCM, 2017) La identidad $a\left(a^9 - a^8\right) + a^9 = a^x$ se cumple para todo a. El valor de x es

   a) 0 b) 1 c) 8 d) 9 e) $\boxed{10}$

   Idea para la solución: Factorizar a de los términos de la izquierda.

2. (OCM, 2017) La solución de la ecuación $2017x^2 - 2017^{2017} = 0$ es

   a) $x = \pm 2017$ b) $x = \pm 2017^{2017}$ c) $\boxed{x = \pm 2017^{1008}}$ d) $x = \pm 2017^{1009}$ e) $x = \pm\sqrt{2017^{2017}}$

   Idea para la solución: Use las propiedades de factor común, $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$ y diferencia de cuadrados.

3. (ORM-UIS, 2010) Si $[a, b, c]$ representa la operación $\frac{a+b}{c}$, donde $c \neq 0$, ¿Cuál es el valor de $[[60, 30, 90], [2, 1, 3], [10, 5, 15]]$?

   a) 0 b) 0,5 c) 1 d) 1,5 e) $\boxed{2}$

   Idea para la solución: Siga el patrón de la operación en cada uno de los corchetes.

4. (ORM-UIS, 2009) Sea f una función definida como $f(n) = (n-1)f(n-1)$; donde, $f(1) = 1$. Cuyo dominio y recorrido es el conjunto de los números naturales. Si k ($k > 1$), es un número natural arbitrario, el valor de $f(k)$ es

   a) $(k-1)^2$
   b) $(k-1)(k-2)$
   c) $k!(k-1)$
   d) $(k-1)!(k-1)$
   e) $\boxed{(k-2)!(k-1)}$

   Idea para la solución: Realizar por lo menos 6 iteraciones y determinar la secuencia de la función.

5. (OLCOMA, 2019) Si a y b son dos números reales positivos, tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{3} \qquad \text{y} \qquad a^2 + b^2 = \frac{5}{2},$$

   determine el valor de $a \cdot b$

a) $\frac{3}{8}$ b) 3 c) $\boxed{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{8}{3}$ e) 6

Idea para la solución: Despeje $a+b$ de la primera ecuación y sume $2ab$ en la segunda ecuación.

6. (OLCOMA, 2019) Si $a \neq b$,

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= 19x^3 \qquad \text{y} \\ a - b &= x, \end{aligned}$$

el conjunto de de todos los posibles valores de a es

a) $\{-3x\}$ b) $\{-2x\}$ c) $\boxed{\{3x, -2x\}}$ d) $\{-3x, 2x\}$ e) $\{3x\}$

Idea para la solución: Despeje de la segunda ecuación b y de la primera b^3.

English Challenge

7. (MMO, 2018) Solve the equation

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)\, x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)\, x^2 + 1.$$

a) $\{\log_2 5, \log_3 2, \log_5 8\}$

b) $\boxed{\{\log_2 3, \log_3 5, \log_5 2\}}$

c) $\{\log_2 5, \log_2 3, \log_3 5\}$

d) $\{\log_3 2, \log_3 5, \log_5 3\}$

e) $\{\log_5 3, \log_5 2, \log_2 5\}$

Idea for solution: For the first parenthesis use parameters $a = \log_2 3$, $b = \log_3 2$, $c = \log_5 3$ and for the second parenthesis Bayes rule $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$.

Referencias

[1] MinDecisions. Recuperado de https://mindyourdecisions.com/blog/.

[2] MMO, Mediterranean Mathematics Olympiad. Recuperado de https://artofproblemsolving.com/community/c3232.

[3] OCM, Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Recuperado de oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas.

[4] OLCOMA, Olimpiadas Costarricense de Matemáticas. Recuperado de http://olcoma.ucr.ac.cr/.

[5] ORM-UIS, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Recuperado de matematicas.uis.edu.co.

Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesores de Apoyo
E-mail: orm@udenar.edu.co
Página web: http://orm.udenar.edu.co/
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2021