> *La enseñanza puede ser la más grande de las artes, ya que el medio es la mente y el espíritu humano.*

John Steinbeck, *Escritor estadounidense ganador del Premio Nobel de Literatura en 1962*, 27 de febrero de 1902 – 20 de diciembre de 1968.

1. Dorothy Vaughan (1910 – 2008)

es.wikipedia.org

Fue una matemática afroamericana que trabajó en la NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), agencia que precedió a la NASA, donde se destacó en los diversos grupos en los que trabajó como el grupo West Computing, en la División de Análisis, y en Computación. Ahí se hizo una experta en el lenguaje de programación FORTRAN, y en el proyecto para lanzar satélites al espacio Scout, hasta su retiro de la NASA en 1971. Fue la primera supervisora y mánager afroamericana de la NASA. Antes de ingresar a la NASA ejerció como profesora de matemáticas.
La vida de Vaughan es una de las tres historias protagonistas que se cuentan en el libro Hidden Figures (Figuras ocultas), y la película de mismo nombre, sobre el grupo de matemáticas afroamericanas que colaboraron en forma decisiva con los programas Mercury y Apolo de la NASA.

2. Problema resuelto

(OMM, 2007) Considerar la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 15ax + a^2 = 0.$$

Encuentre los valores de a para los cuales las soluciones de la ecuación x_1 y x_2 satisfacen la igualdad $x_1^2 + x_2^2 = 2007$.

Respuesta: Los valores de a son 3 y -3.

Solución. Recordemos que si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - mx + n = 0$ entonces se cumple que $x_1 + x_2 = m$ y $x_1 x_2 = n$. En nuestro caso particular obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 15a \\ x_1 x_2 &= a^2. \end{aligned}$$

De ahí que, elevando al cuadrado

$$225a^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2a^2$$

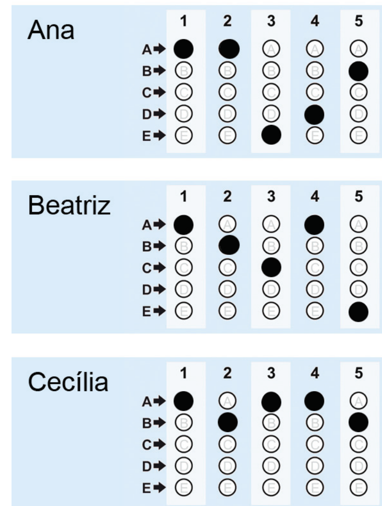
y así

$$x_1^2 + x_2^2 = 223a^2 = 2007.$$

Por tanto, solucionando la última ecuación llegamos a que $a = -3$ o $a = 3$. □

3. Problemas Propuestos

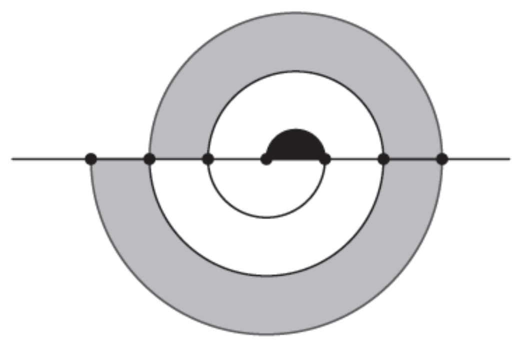
1. (OBMEP, 2016) En la figura se muestra las respuestas de Ana, Beatriz y Celília en un examen de su colegio, el cual contiene 5 preguntas y cada pregunta tiene 5 opciones de respuesta A, B, C, D y E. Se conoce que Ana contesto correctamente 4 preguntas, Beatriz 1 y Cecília 3. ¿Cuál fue la pregunta en la que Ana se equivoco?



   a) 1
   b) 2
   c) $\boxed{3}$
   d) 4
   e) 5

   Idea para la solución: Observe que si Ana y Cecília contestaron correctamente 4 y 3 preguntas respectivamente, entonces ellas contestaron correctamente al menos dos preguntas en común.

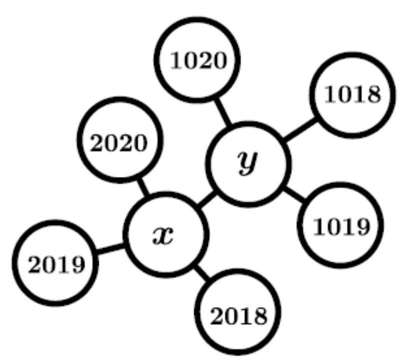
2. (OBMEP, 2010) En la figura los puntos que se encuentran sobre la recta están igualmente espaciados. Los arcos que unen estos puntos son semicircunferencias y el área de la región oscura es igual a 1. ¿Cual es el área de la región gris?



   a) 15
   b) 18
   c) 25
   d) 30
   e) $\boxed{36}$

   Idea para la solución: El área de cada semicircunferencia se puede expresar en términos del área de la región oscura.

3. (ORM-UDENAR, 2020) En la figura dos números son *vecinos* si están unidos mediante un segmento. Si x y y es cada uno la media aritmética de sus vecinos, el valor de $x - y$ es:



   a) 120
   b) 300
   c) 420
   d) 500
   e) $\boxed{600}$

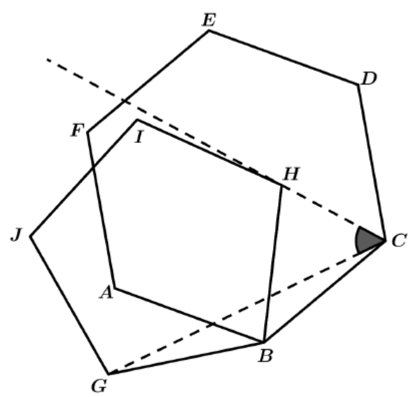
Idea para la solución: Recuerde que la media aritmética de cuatro números a, b, c y d es $\frac{a+b+c+d}{4}$.

4. (OMGTO, 2019) Se dice que un número es Paceño si al escribir sus dígitos en orden inverso se obtiene un número mayor que él. Por ejemplo, el 3426 es Paceño porque 6243 es mayor que 3426, mientras que el 774 no es Paceño porque 477 no es mayor que 774. ¿Cuántos números de tres dígitos son Paceños?

   a) $\boxed{360}$ b) 380 c) 400 d) 426 e) 774

   Idea para la solución: Considere el número de tres cifras $n = abc$ con $a \neq 0$, entonces el número que se obtiene al invertir sus dígitos es cba.

5. (ORM-UDENAR, 2020) En la figura $ABCDEF$ y $GBHIJ$ son un hexágono regular y un pentágono regular respectivamente, con $\overline{AB} = \overline{JG}$. Entonces la medida del $\measuredangle HCG$ en grados es:
   Respuesta:___________



   Idea para la solución: Observe que el pentágono se puede rotar al rededor del vértice B y la medida del ángulo solicitado no cambia.

6. (OMM, 2015) Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ el conjunto de los enteros positivos. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función, la cual asigna a cada entero positivo, un número entero positivo. Además, se conoce que la función f satisface las siguentes condiciones:

   a) $f(1) = 1$.
   b) Para todo enteros positivo a y b se cumple
   $$f(a + b + ab) = a + b + f(ab).$$

   ¿Cuá es el valor de $f(21)$?

   a) 27 b) 25 c) 23 d) $\boxed{21}$ e) 19

   Idea para la solución: Iniciar aplicando la segunda condición para los valores $a = b = 1$.

English Challenge

7. (AoPS, 2000) Suppose that x, y and z are three positive numbers that satisfy the equations $xyz = 1$, $x + \frac{1}{z} = 5$ and $y + \frac{1}{x} = 29$. Then $z + \frac{1}{y} = \frac{m}{n}$, where m and n are relatively prime positive integers. ¿What is the value of $m + n$?

   a) $\boxed{5}$ b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

   Idea para la solución: Calculate $\left(x + \frac{1}{z}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right)\left(z + \frac{1}{y}\right)$.

Referencias

[1] AoPS, Art Of Problem Solving. Recuperado de artofproblemsolving.com.

[2] OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Recuperado de obmep.org.br.

[3] OMGTO, Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato. Recuperado de ommgto.cimat.mx.

[4] OMM, Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Recuperado de www.ommenlinea.org/.

[5] ORM-UDENAR, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad de Nariño. Recuperado de orm.udenar.edu.co.

Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesores de Apoyo
E-mail: orm@udenar.edu.co
Página web: http://orm.udenar.edu.co/
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2021