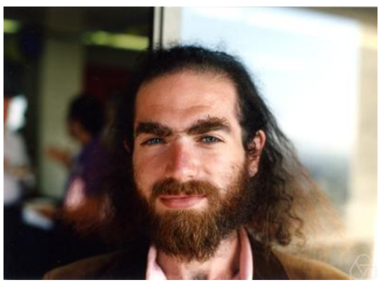
Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Universidad de Nariño
Nivel III (Grados 10 y 11)
Entrenamiento No. 3: Geometría (Profesores)

> *Lo que importa verdaderamente en la vida no son los objetivos que nos marcamos, sino los caminos que seguimos para lograrlo. (Peter Bamm).*

Peter Bamm, *Fue médico cirujano y escritor alemán. Participó como voluntario en la I Guerra Mundial, en la II Guerra Mundial participó como médico militar y su más conocida novela es La bandera invisible (Die unsichtbare Flagge).*

1. Grigori Perelman (1966-)

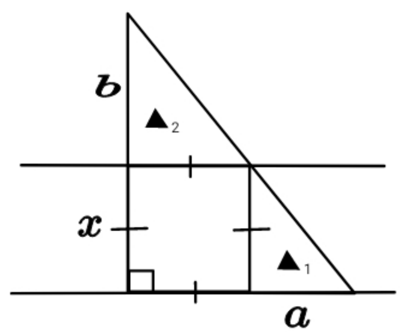


es.wikipedia.org

Grigori «Grisha» Yákovlevich Perelmán es un matemático ruso que ha hecho contribuciones históricas a la geometría riemanniana y a la topología geométrica. En particular, ha demostrado la conjetura de geometrización de Thurston, con lo que se ha logrado resolver la famosa conjetura de Poincaré, propuesta en 1904 y considerada una de las hipótesis matemáticas más importantes y difíciles de demostrar.
En agosto de 2006, se le otorgó a Perelmán la Medalla Fields por «sus contribuciones a la geometría y sus ideas revolucionarias en la estructura analítica y geométrica del flujo de Ricci». El 18 de marzo de 2010, el Instituto de Matemáticas Clay anunció que Perelmán cumplió con los criterios para recibir el primer premio de los problemas del milenio de un millón de dólares, por la resolución de la conjetura de Poincaré. Es considerado uno de los hombres más inteligentes del mundo.

2. Problema resuelto

(ORM-UIS, 2010) Por un punto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo se trazan líneas rectas paralelas a los catetos del triángulo de tal modo que se subdivide el triángulo en un cuadrado y dos triángulos rectángulos más pequeños. El área de uno de los triángulos rectángulos pequeños es igual a m por el área del cuadrado. La razón entre el área del otro triángulo rectángulo pequeño y el área del cuadrado es:



a) $\frac{1}{2m+1}$ b) m c) $1-m$ d) $\boxed{\frac{1}{4m}}$ e) $\frac{1}{8m^2}$

Respuesta: d).

Solución. De la figura se tiene que los triángulos rectángulos $\blacktriangle_1$ y $\blacktriangle_2$ son congruentes; así, sus lados son proporcionales y por tanto

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x},$$

de donde

$$x^2 = ab. \tag{1}$$

Ahora, teniendo en cuenta que el área del triángulo $\blacktriangle_1$ es m veces el área del cuadrado

$$\begin{aligned} A_{\Delta_1} &= mA_{\square} \\ \frac{ax}{2} &= mx^2 \\ a &= 2m\frac{x^2}{x} \\ a &= 2mx. \end{aligned} \tag{2}$$

Por tanto, la razón entre el área del otro triángulo $\blacktriangle_2$ y el área del cuadrado $\square$ es

$$\frac{A_{\Delta_2}}{A_{\square}} = \frac{\frac{bx}{2}}{x^2} = \frac{bx}{2x^2}.$$

Al sustituir de la igualdad (1) la expresión $x^2 = ab$,

$$\frac{A_{\Delta_2}}{A_{\square}} = \frac{bx}{2x^2} = \frac{bx}{2ab} = \frac{x}{2a}$$

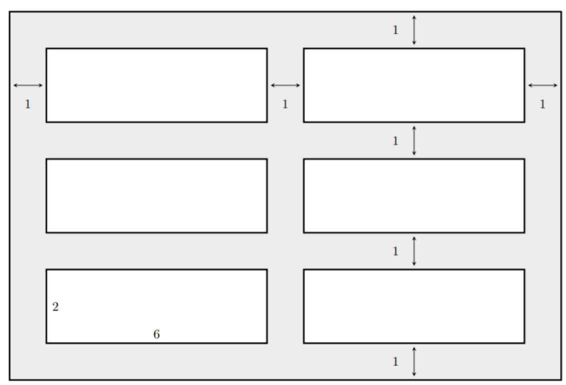
y al sustituir de la igualdad (2) la expresión $a = 2mx$ se tiene

$$\frac{A_{\Delta_2}}{A_{\square}} = \frac{x}{2a} = \frac{x}{2(2mx)} = \frac{1}{4m}.$$

$\square$

3. Problemas Propuestos

1. (OCM, 2017) Tatiana tiene tres filas de dos jardineras de flores de 6 pies por 2 pies en su patio. Las jardineras están separadas y también rodeadas por caminos de un pie de ancho, como se muestra en el diagrama. ¿A qué es igual el área total, en pies cuadrados, de los caminos?



   a) 72 b) $\boxed{78}$ c) 90

   d) 120 e) 150

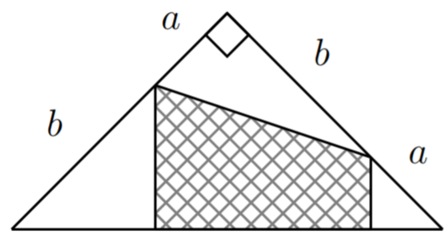
   Idea para la solución: Calcular el área total del patio y restarle el área de las 6 jardineras.

2. (OCM, 2017) En el diagrama a la derecha se muestra un triángulo isósceles de 720 cm^2 de área dividido en bandas de igual altura. El segmento vertical es la altura del triángulo. ¿Cuál es el área en cm^2 de la parte no sombreada del triángulo?

   a) 44 b) 45 c) 330 d) $\boxed{360}$ e) 390

   Idea para la solución: Completar espacios en blanco con los sombreados.

3. (ORM-UIS, 2010) ¿Cuál es la razón del área de la región sombreada al área de la región no sombreada en el triángulo que se muestra a la derecha?

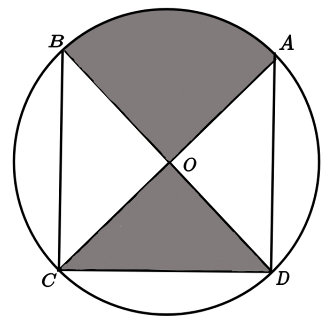


a) $2:1$ b) $\boxed{1:1}$ c) $1:2$

d) $3:1$ e) $1:3$

Idea para la solución: Desde el vértice superior izquierdo de la figura sombreada trace el segmento de recta paralelo al cateto derecho del triángulo rectángulo.

4. (OLCOMA, 2018) En la figura a la derecha, las diagonales del cuadrado $\square\, ABCD$ se intersecan en el punto O. Si el área del círculo de radio $\overline{OD}$ es 18π cm^2, entonces el área de la región sombreada (en cm^2) es:

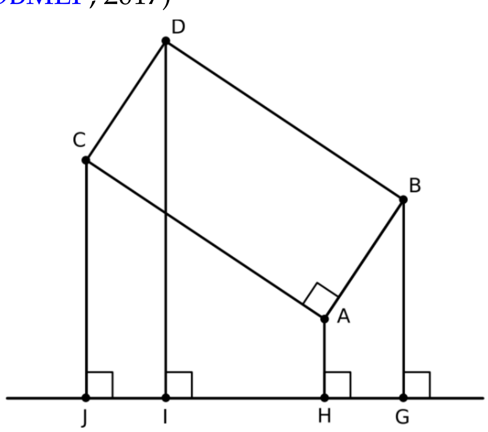


a) $\boxed{9+\frac{9\pi}{2}}$ b) $\frac{9}{2}+9\pi$ c) $\frac{9}{4}+\frac{9\pi}{2}$

d) $\frac{9}{4}+9\pi$ e) $\frac{9}{2}+\frac{9\pi}{2}$

Idea para la solución: Observe que la región sombreada superior es igual a la cuarta parte del área del círculo. Por otro lado, el área del triángulo CDO es igual al radio al cuadrado sobre 2.

5. (OBMEP, 2017)



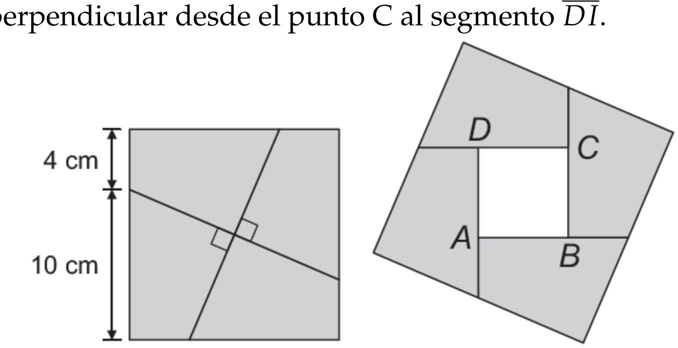
En la figura a la izquierda, $ABCD$ es un rectángulo y la medida de las distancias de los vértices A, B y C al segmento JG son 2, 4 y 5 metros, respectivamente. ¿Cuál es la distancia del vértice D al segmento JG?

a) 5 b) 6 c) $\boxed{7}$

d) 8 e) 9

Idea para la solución: Trace el segmento de recta perpendicular desde el punto C al segmento $\overline{DI}$.

6. (OBMEP, 2017) Por el centro del cuadrado de la primera figura se trazan dos rectas perpendiculares, las cuales dividen al cuadrado en cuatro cuadriláteros iguales. Estos cuadriláteros son reorganizados en otro cuadrado de mayor tamaño, como se se muestra en la segunda figura. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$ de la segunda figura?

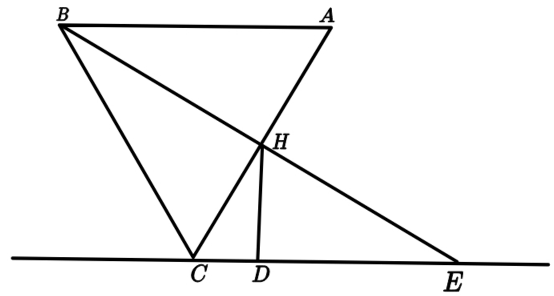


a) 16 cm^2 b) 25 cm^2 c) $\boxed{36 \text{ cm}^2}$ d) 49 cm^2 e) 64 cm^2

Idea para la solución: Comparar las longitudes de los lados internos de cada cuadrilátero que compone el cuadrado pequeño con el lado del cuadrado grande.

English Challenge

7. (OLCOMA, 2018) In the figure, triangle ΔABC is equilateral, D is a point on line $\overleftrightarrow{CE}$, $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$, and $\overline{BE}$ divides angle $< CBA$ into two equal angles of the same measure. If H is the intersection point between segments $\overline{AC}$ and $\overline{BE}$, where the height of triangle ΔCHE is $\overline{HD} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ and $\overline{DC} = \frac{3}{2}$, then the area of triangle ΔABC is



a) $3\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $\boxed{9\sqrt{3}}$ e) $11\sqrt{3}$

Idea for solution: Note that H is the midpoint of $\overline{AC}$.

Referencias

[1] OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Recuperado de obmep.org.br.

[2] OCM, Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Recuperado de oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas.

[3] OLCOMA, Olimpiadas Costarricense de Matemáticas. Recuperado de http://olcoma.ucr.ac.cr/.

[4] ORM-UIS, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Recuperado de matematicas.uis.edu.co.

Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesores de Apoyo
E-mail: `orm@udenar.edu.co`
Página web: `http://orm.udenar.edu.co/`
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2021