



Olimpiadas Regionales de Matemáticas  
Universidad de Nariño  
Nivel III (Grados 10 y 11)  
Entrenamiento No. 1: Misceláneo (Profesores)



“ La ciencia es más que un simple conjunto de conocimientos: es una manera de pensar. ”

Carl Sagan , Astrónomo, astrofísico, cosmólogo, escritor y divulgador científico estadounidense, 9 de noviembre de 1934 – 20 de diciembre de 1996.

## 1. Henri Poincaré (1854-1912)



 [www.bbc.com](http://www.bbc.com)

Poincaré fue uno de los gigantes de las matemáticas y uno de los genios de la historia. Además de matemático, fue astrónomo y físico teórico. Con su portentosa memoria, solía resolver los problemas completamente en su cabeza y, una vez resueltos, escribía rápidamente los resultados. Catalogado por E.T. Bell como el “último universalista”, un hombre que estaba a gusto en todas las ramas de las matemáticas, tanto puras como aplicadas. Considerado uno de esos raros sabios capaz de hacer importantes contribuciones en campos tan diversos como el análisis, el álgebra, la topología, la astronomía y la física teórica.

## 2. Problema resuelto

(OM-CL, 2019) Sean  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  y  $da$  números de dos cifras tales que  $ab + bc + cd + da = 110$ . ¿Cuál es el valor de  $a + b + c + d$ ?

**Respuesta:** 10

*Solución.* Teniendo en cuenta que todo número de dos cifras  $xy$  puede expresarse como  $10x + y$ . Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}(10a + b) + (10b + c) + (10c + d) + (10d + a) &= 110 \\ 11a + 11b + 11c + 11d &= 110 \\ 11(a + b + c + d) &= 110 \\ (a + b + c + d) &= 10\end{aligned}$$

□

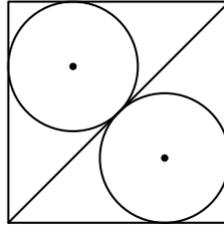
## 3. Problemas Propuestos

1. (ORM-UNIVALLE, 2018) Sean  $a$  y  $b$  dos números racionales tales que  $a + b = \frac{7}{3}$  y  $ab = 2$ , ¿cuál es el valor de  $a^2 + b^2$ ?

- a)  $\frac{13}{3}$       b)  $\frac{7}{9}$       c)  $\frac{10}{9}$       d)  $\frac{11}{9}$       e)  $\boxed{\frac{13}{9}}$

**Idea para la solución:** Tener en cuenta el desarrollo del binomio  $(a + b)^2$ .

2. (NMO, 2019) El cuadrado tiene una longitud de lado 1. ¿Cuál es la distancia entre los centros de las circunferencias?



- a)  $2 - \sqrt{2}$       b)  $\sqrt{2} - 1$       c)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$       d)  $\sqrt{2}$       e)  $\frac{1}{2}$

**Idea para la solución** Expresar la diagonal del cuadrado en términos del radio de la circunferencia.

3. (OMPR, 2018-2019) Un León está oculto en una de las tres habitaciones. Una nota en la puerta de la habitación 1 dice "¡el León está aquí!". Una nota en la puerta de la habitación 2 dice "¡ el León no está aquí!". Una nota en la puerta de la habitación 3 dice " $2+3=2 \times 3$ ". Solo una de estas proposiciones es cierta. ¿En qué habitación está oculto el León?

- a) En la habitación 1.  
 b) En la habitación 2.  
 c) En la habitación 3.  
 d) Puede estar en cualquier habitación.  
 e) Puede estar en la habitación 1 o en la habitación 2.

**Idea para la solución:** Considerar dos casos para ver cuál de las dos primeras afirmaciones será la correcta, ya que la afirmación " $2+3=2 \times 3$ " sabemos que es falsa.

4. (OM-UDEA, 2008) Se tienen 5 tarjetas idénticas marcadas por su cara principal con los números del 1 al 5. El reverso de cada tarjeta también está marcado con los números del 1 al 5, con las siguientes condiciones:

- Ninguna tarjeta está marcada con el mismo número por la cara principal y por el reverso.
- Si el número marcado en la cara principal es par, entonces, su reverso es un número impar.

Si se voltea la tarjeta con el número 5 y su reverso tiene el número 3, entonces el mínimo número de tarjetas que deben voltearse para poder saber exactamente que tarjeta tiene en su reverso el número 1, es:

- a) 1      b) 2      c) 3      d) 4      e) 5

**Idea para la solución:** Considerar los posibles etiquetamientos de las tarjetas.

5. (OLCOMA, 2017) Sean  $a$  y  $b$  números reales positivos tales que  $a^2 - b^2 = 2$ . Una solución de la ecuación

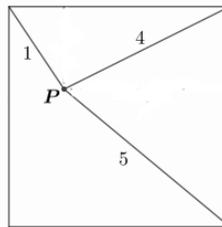
$$\sqrt{\frac{4a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4} = \left(\frac{a-b}{b}\right)x + \frac{b}{a}$$

es:

- a)  $a - b$       b)  $a + b$       c)  $a(a - b)$       d)  $a(a + b)$       e)  $b(a - b)$

**Idea para la solución:** Expresar el numerador del radicando como un binomio al cuadrado.

6. (OPMAT, 2020) Sea  $P$  un punto interior de un cuadrado tal que las distancias a tres de sus vértices consecutivos sean iguales a 1 cm, 4 cm y 5 cm, en ese orden, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del cuadrado?



- a)  $17 \text{ cm}^2$       b)  $4\sqrt{17} \text{ cm}^2$       c)  $4\sqrt{19} \text{ cm}^2$       d)  $19 \text{ cm}^2$       e)  $20 \text{ cm}^2$

**Idea para la solución:** Sea  $L$  el lado del cuadrado, si desde el punto  $P$  se traza segmentos perpendiculares a los lados del cuadrado, con longitudes  $x$  y  $y$ , entonces usando el Teorema de Pitágoras se obtiene un sistema de 3 ecuaciones. Determinar las distancias  $x$  y  $y$  en términos de  $L$ .

7. (ORM-UDENAR, 2016) En una reunión de 13 personas, los invitados se sientan en una mesa circular. Las mujeres han decidido decir la verdad entre ellas y mentirle a los hombres. Los hombres han decidido decir la verdad entre ellos y mentirle a las mujeres. La primera persona le dice a quien está a su derecha: “en nuestro grupo la mayoría son hombres”, esta le dice a quien está a la derecha: “en nuestro grupo la mayoría son mujeres”, y siguen así hasta que la última persona le dice a la primera: “en nuestro grupo la mayoría son hombres”. Si se sabe que la primera persona le habla a una persona del mismo sexo, la cantidad de mujeres en la reunión es:

- a) 3      b) 4      c) 5      d) 6      e) 7

**Idea para la solución:** Considerar los casos cuando la primera persona es hombre o mujer. Observe que la primera afirmación hecha es una verdad.

8. (ORM-UIS, 2009) Consideremos el número formado por los primeros 2021 números naturales, es decir: 1234567891011...20202021. ¿Cuántos dígitos tiene el número formado?

- a) 2889      b) 4032      c) 6732      d) 6977      e) 7001

**Idea para la solución:** Realizar un conteo de cuantos números de una cifra se tienen, posteriormente de dos cifras, de tres tres cifras y de cuatro cifras hasta 2021.



## English Challenge

9. (COMATEQ-UNICAUCA, 2020). In the sequence

$$\dots, a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

each term is the sum of the two terms immediately to its left. Find  $a$ .

**Idea para la solución:** Visita el solucionario del año 2020 de la COMATEQ en el siguiente link [webwork-test.uprm.edu](http://webwork-test.uprm.edu)

## Referencias

- [1] COMATEQ, Competencia de MATemáticas por EQuipos. Recuperado de [webwork-test.uprm.edu](http://webwork-test.uprm.edu).
- [2] NMO, Norway Math Olympiad. Recuperado de [www.matematikkjenteret.no](http://www.matematikkjenteret.no).
- [3] OLCOMA, Olimpiadas Costarricense de Matemáticas. Recuperado de [ocm.edu.co](http://ocm.edu.co).
- [4] OM-CL, Matemáticas y Olimpiadas. Sociedad de Matemáticas de Chile. Recuperado de <http://www.olimpiadadematematica.cl/>.
- [5] OM-UDEA, Olimpiadas de Matemáticas, Universidad de Antioquia. Recuperado de [www.olimpiadasudea.co](http://www.olimpiadasudea.co).
- [6] OMPR, Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico. Recuperado de [om.pr](http://om.pr).
- [7] OPMAT, Olimpiada Paceña de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés-Bolivia. Recuperado de [opmat.fcpn.edu.bo](http://opmat.fcpn.edu.bo).
- [8] ORM-UDENAR, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad de Nariño. Recuperado de [orm.udenar.edu.co](http://orm.udenar.edu.co).
- [9] ORM-UIS, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Recuperado de [matematicas.uis.edu.co](http://matematicas.uis.edu.co).
- [10] ORM-UNIVALLE, Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad del Valle. Recuperado de [orm.univalle.edu.co](http://orm.univalle.edu.co).

**Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesoras de Apoyo**

E-mail: [orm@udenar.edu.co](mailto:orm@udenar.edu.co)

Página web: <http://orm.udenar.edu.co/>  
Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

2021