Fibonacci y Problemas Relacionados

Gabriel Uribe

17 de octubre 2020

Leonardo Pisano Fibonacci

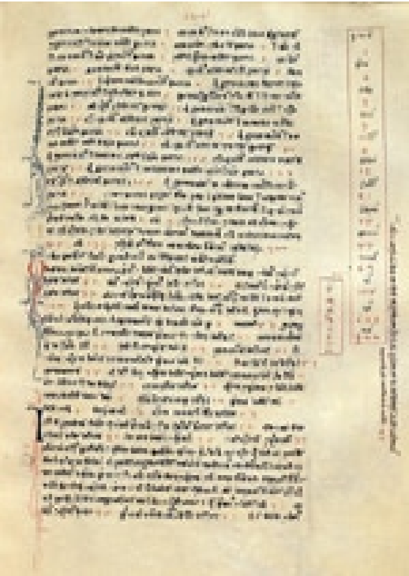
(1170-1250)

Liber Abaci

En 1202, el matemático italiano Fibonacci planteó un problema matemático de conejos.

Liber Abaci

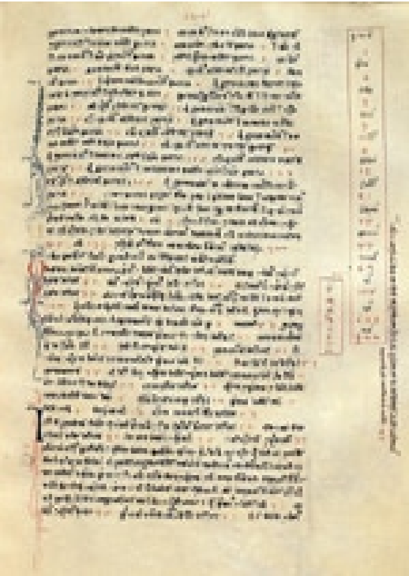
En 1202, el matemático italiano Fibonacci planteó un problema matemático de conejos.



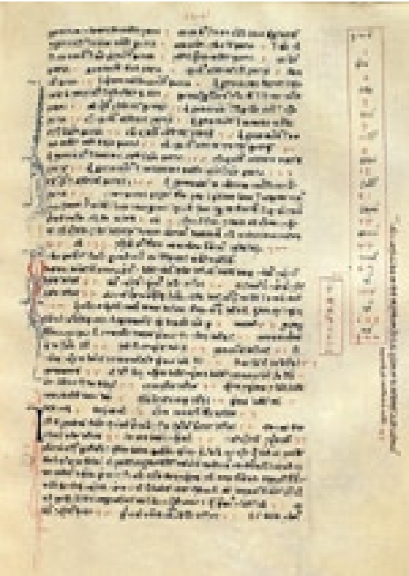
Liber Abaci

En 1202, el matemático italiano Fibonacci planteó un problema matemático de conejos.

En su libro Liber Abaci (El libro de los cálculos) se preguntó cuántos conejos se producirían en circunstancias perfectas. es decir, donde no hay depredadores.

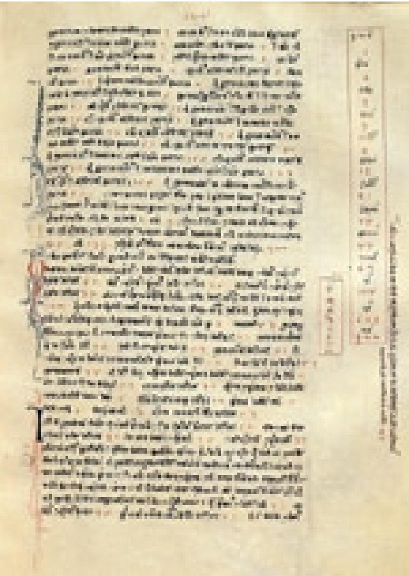


El problema



El problema

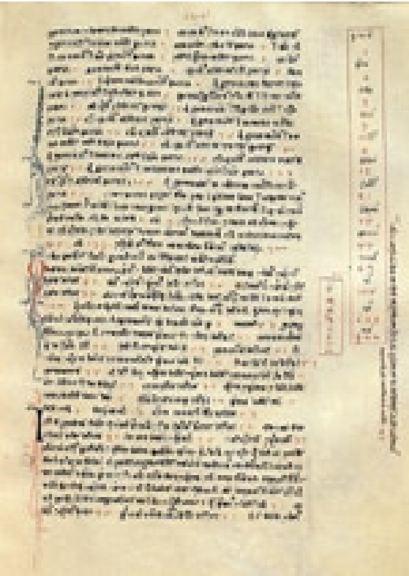
Fibonacci planteó el problema teórico de la siguiente manera:



El problema

Fibonacci planteó el problema teórico de la siguiente manera:

Imagine que tiene un par de conejos, un macho y una hembra en un campo. ¿Cuántos conejos producirán después de un año?

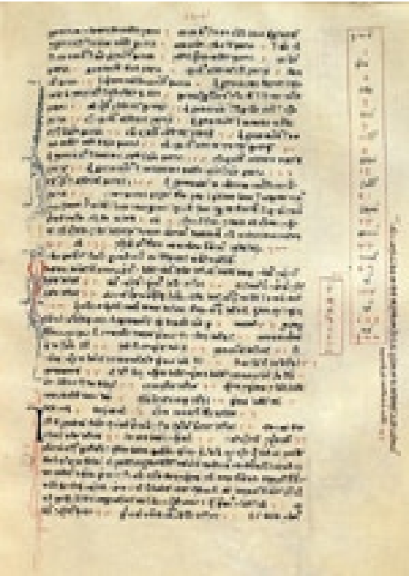


El problema

Fibonacci planteó el problema teórico de la siguiente manera:

Imagine que tiene un par de conejos, un macho y una hembra en un campo. ¿Cuántos conejos producirán después de un año?

Fibonacci hizo las siguientes suposiciones:



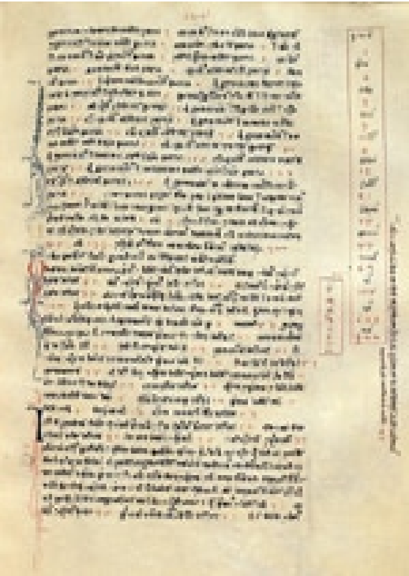
El problema

Fibonacci planteó el problema teórico de la siguiente manera:

Imagine que tiene un par de conejos, un macho y una hembra en un campo. ¿Cuántos conejos producirán después de un año?

Fibonacci hizo las siguientes suposiciones:

1. Los conejos no mueren ni son comidos por los depredadores



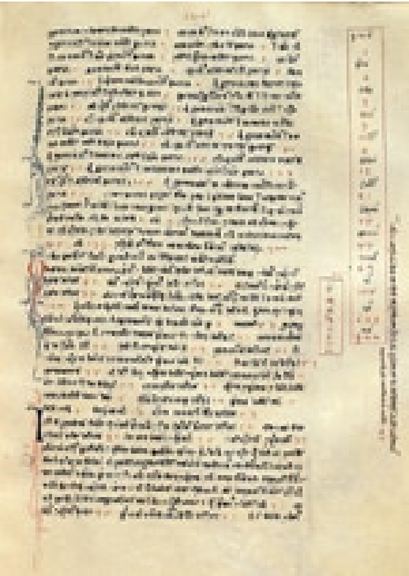
El problema

Fibonacci planteó el problema teórico de la siguiente manera:

Imagine que tiene un par de conejos, un macho y una hembra en un campo. ¿Cuántos conejos producirán después de un año?

Fibonacci hizo las siguientes suposiciones:

1. Los conejos no mueren ni son comidos por los depredadores
2. Cada hembra se reproduce todos los meses, a partir del segundo mes que está viva.



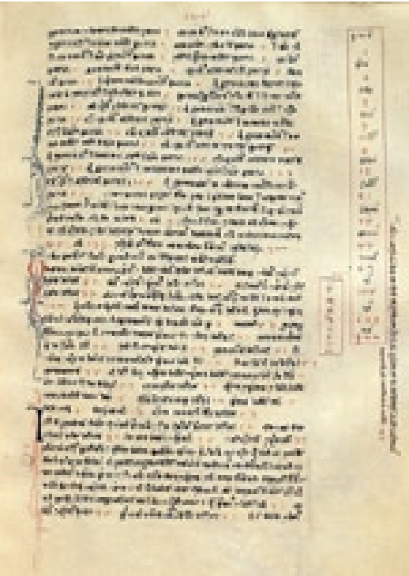
El problema

Fibonacci planteó el problema teórico de la siguiente manera:

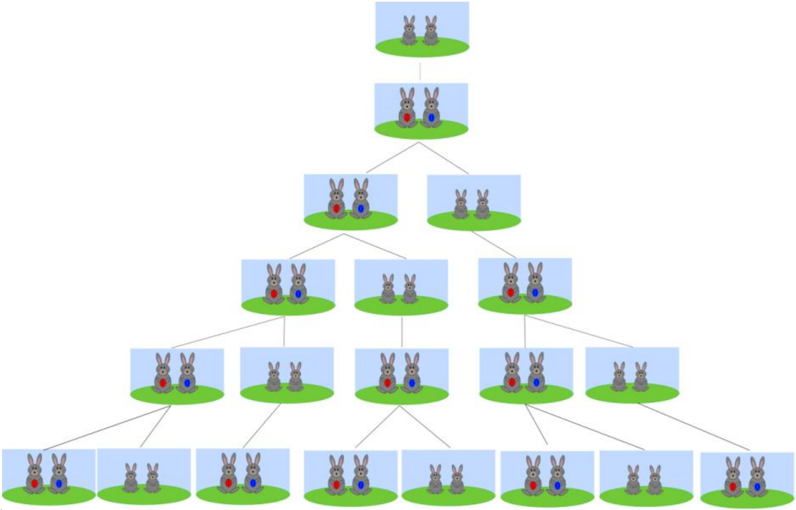
Imagine que tiene un par de conejos, un macho y una hembra en un campo. ¿Cuántos conejos producirán después de un año?

Fibonacci hizo las siguientes suposiciones:

1. Los conejos no mueren ni son comidos por los depredadores
2. Cada hembra se reproduce todos los meses, a partir del segundo mes que está viva.
3. Cada vez que la hembra se reproduce, da a luz un par de conejos (un macho y una hembra).



Solución



Solución

Mes	Conejos
Enero	1

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8
Julio	13

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8
Julio	13
Agosto	21

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8
Julio	13
Agosto	21
Septiembre	34

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8
Julio	13
Agosto	21
Septiembre	34
Octubre	55

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8
Julio	13
Agosto	21
Septiembre	34
Octubre	55
Noviembre	89

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8
Julio	13
Agosto	21
Septiembre	34
Octubre	55
Noviembre	89
Diciembre	144

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8
Julio	13
Agosto	21
Septiembre	34
Octubre	55
Noviembre	89
Diciembre	144

Solución

Mes	Conejos
Enero	1
Febrero	1
Marzo	2
Abril	3
Mayo	5
Junio	8
Julio	13
Agosto	21
Septiembre	34
Octubre	55
Noviembre	89
Diciembre	144

En general, se puede conseguir la ecuación de recurrencia lineal

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

dado que $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$, la fórmula se cumple para todo $n \geq 2$

Pregunta

¿Cuál es el valor de f_{30}?

Pregunta

¿Cuál es el valor de f_{30}?

- Para encontrar f_{30}, debemos conocer cuáles son los valores de f_{29} y f_{28}, pero para encontrar estos debemos conocer además $f_{27}, f_{26}, \ldots, f_1$.

Pregunta

¿Cuál es el valor de f_{30}?

- Para encontrar f_{30}, debemos conocer cuáles son los valores de f_{29} y f_{28}, pero para encontrar estos debemos conocer además $f_{27}, f_{26}, \ldots, f_1$.
- Otra forma es. encontrar una fórmula cerrada para f_n, esto por medio de la solución a una ecuación de recurrencia lineal.

Solución encontrando cada valor

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 0\\
f_1 &= 1\\
f_2 &= 1\\
f_3 &= f_2 + f_1 = 2\\
f_4 &= f_3 + f_2 = 3\\
f_5 &= f_4 + f_3 = 5\\
f_6 &= f_5 + f_4 = 8\\
f_7 &= f_6 + f_5 = 13\\
f_8 &= f_7 + f_6 = 21\\
f_9 &= f_8 + f_7 = 34\\
f_{10} &= f_9 + f_8 = 55\\
f_{11} &= f_{10} + f_9 = 89\\
f_{12} &= f_{11} + f_{10} = 144\\
f_{13} &= f_{12} + f_{11} = 233\\
f_{14} &= f_{13} + f_{12} = 377\\
f_{15} &= f_{14} + f_{13} = 610
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{16} &= f_{15} + f_{14} = 987\\
f_{17} &= f_{16} + f_{15} = 1597\\
f_{18} &= f_{17} + f_{16} = 2584\\
f_{19} &= f_{18} + f_{17} = 4181\\
f_{20} &= f_{19} + f_{18} = 6765\\
f_{21} &= f_{20} + f_{19} = 10946\\
f_{22} &= f_{21} + f_{10} = 17711\\
f_{23} &= f_{22} + f_{21} = 28657\\
f_{24} &= f_{23} + f_{22} = 46368\\
f_{25} &= f_{24} + f_{23} = 75025\\
f_{26} &= f_{25} + f_{24} = 121393\\
f_{27} &= f_{26} + f_{25} = 196418\\
f_{28} &= f_{27} + f_{26} = 317811\\
f_{29} &= f_{28} + f_{27} = 514229\\
f_{30} &= f_{29} + f_{28} = 832040
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de Recurrencia

Una relación de recurrencia lineal es una ecuación que define el *n* enésimo término en una secuencia en términos de los *k* términos anteriores en la secuencia. La relación de recurrencia tiene la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

donde cada c_i es un coeficiente constante.

Ecuaciones de Recurrencia

- Consideramos la solución de la forma $x_n = ar^n$

Una relación de recurrencia lineal es una ecuación que define el n enésimo término en una secuencia en términos de los k términos anteriores en la secuencia. La relación de recurrencia tiene la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

donde cada c_i es un coeficiente constante.

Ecuaciones de Recurrencia

Una relación de recurrencia lineal es una ecuación que define el n enésimo término en una secuencia en términos de los k términos anteriores en la secuencia. La relación de recurrencia tiene la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

donde cada c_i es un coeficiente constante.

- Consideramos la solución de la forma $x_n = ar^n$
- Reemplazamos en la ecuación, simplificamos e igualamos a cero

$$ar^n = c_1 ar^{n-1} + c_2 ar^{n-2} + \cdots + c_k ar^{n-k}$$

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

Ecuaciones de Recurrencia

Una relación de recurrencia lineal es una ecuación que define el n enésimo término en una secuencia en términos de los k términos anteriores en la secuencia. La relación de recurrencia tiene la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

donde cada c_i es un coeficiente constante.

- Consideramos la solución de la forma $x_n = ar^n$
- Reemplazamos en la ecuación, simplificamos e igualamos a cero

$$ar^n = c_1 ar^{n-1} + c_2 ar^{n-2} + \cdots + c_k ar^{n-k}$$
$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

- Este se le llama polinomio característico

Ecuaciones de Recurrencia

Una relación de recurrencia lineal es una ecuación que define el n enésimo término en una secuencia en términos de los k términos anteriores en la secuencia. La relación de recurrencia tiene la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

donde cada c_i es un coeficiente constante.

- Consideramos la solución de la forma $x_n = ar^n$
- Reemplazamos en la ecuación, simplificamos e igualamos a cero

$$ar^n = c_1 ar^{n-1} + c_2 ar^{n-2} + \cdots + c_k ar^{n-k}$$
$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

- Este se le llama polinomio característico
- Encuentre las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_k$ del polinomio característico

Ecuaciones de Recurrencia

Una relación de recurrencia lineal es una ecuación que define el n enésimo término en una secuencia en términos de los k términos anteriores en la secuencia. La relación de recurrencia tiene la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

donde cada c_i es un coeficiente constante.

- Consideramos la solución de la forma $x_n = ar^n$
- Reemplazamos en la ecuación, simplificamos e igualamos a cero

$$ar^n = c_1 ar^{n-1} + c_2 ar^{n-2} + \cdots + c_k ar^{n-k}$$
$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

- Este se le llama polinomio característico
- Encuentre las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_k$ del polinomio característico
- Así la solución es

$$x_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n + \cdots + a_k r_k^n$$

Ecuaciones de Recurrencia

Una relación de recurrencia lineal es una ecuación que define el n enésimo término en una secuencia en términos de los k términos anteriores en la secuencia. La relación de recurrencia tiene la forma:

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

donde cada c_i es un coeficiente constante.

- Consideramos la solución de la forma $x_n = ar^n$
- Reemplazamos en la ecuación, simplificamos e igualamos a cero

$$ar^n = c_1 ar^{n-1} + c_2 ar^{n-2} + \cdots + c_k ar^{n-k}$$
$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

- Este se le llama polinomio característico
- Encuentre las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_k$ del polinomio característico
- Así la solución es
$$x_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n + \cdots + a_k r_k^n$$
- Con las condiciones iniciales se encuentran los valores de a_i

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

El polinomio característico

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

El polinomio característico

$$r^2 - r - 1 = 0$$

y las raíces de este son:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

El polinomio característico

$$r^2 - r - 1 = 0$$

y las raíces de este son:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Así estas son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

El polinomio característico

$$r^2 - r - 1 = 0$$

y las raíces de este son:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Así estas son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solución es

$$f_n = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

Recordemos que $f_0 = 0$ y así

$$0 = f_0 = a_1 + a_2$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

Recordemos que $f_0 = 0$ y así

$$0 = f_0 = a_1 + a_2$$

Además que $f_1 = 1$ y así

$$1 = f_1 = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

Recordemos que $f_0 = 0$ y así

$$0 = f_0 = a_1 + a_2$$

Además que $f_1 = 1$ y así

$$1 = f_1 = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

Debemos solucionar el sistema

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) &= 1 \end{aligned}$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

Recordemos que $f_0 = 0$ y así

$$0 = f_0 = a_1 + a_2$$

Además que $f_1 = 1$ y así

$$1 = f_1 = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

Debemos solucionar el sistema

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

Al solucionarlo queda que

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

Solución de la ecuación de recurrencia de Fibonacci

La ecuación es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ dado que } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1$$

Por tanto, la solución es:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Problema I

Se proporcionan siete segmentos de línea, con longitudes no mayores a 10 centímetros y no menores a 1 centímetro. Muestre que uno puede elegir tres de ellos para representar los lados de un triángulo.

Problema I

Se proporcionan siete segmentos de línea, con longitudes no mayores a 10 centímetros y no menores a 1 centímetro. Muestre que uno puede elegir tres de ellos para representar los lados de un triángulo.

Solución:

Problema I

Se proporcionan siete segmentos de línea, con longitudes no mayores a 10 centímetros y no menores a 1 centímetro. Muestre que uno puede elegir tres de ellos para representar los lados de un triángulo.

Solución:

- Pensemos en la desigualdad triangular, si a, b y c son segmentos de línea, entonces

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

Problema I

Se proporcionan siete segmentos de línea, con longitudes no mayores a 10 centímetros y no menores a 1 centímetro. Muestre que uno puede elegir tres de ellos para representar los lados de un triángulo.

Solución:

- Pensemos en la desigualdad triangular, si a, b y c son segmentos de línea, entonces

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

- Considerando las longitudes de los segmentos $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7$

Problema I

Se proporcionan siete segmentos de línea, con longitudes no mayores a 10 centímetros y no menores a 1 centímetro. Muestre que uno puede elegir tres de ellos para representar los lados de un triángulo.

Solución:

- Pensemos en la desigualdad triangular, si a, b y c son segmentos de línea, entonces

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

- Considerando las longitudes de los segmentos $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7$
- Notemos que $l_2 \geq l_1 \geq 1$

Problema I

Se proporcionan siete segmentos de línea, con longitudes no mayores a 10 centímetros y no menores a 1 centímetro. Muestre que uno puede elegir tres de ellos para representar los lados de un triángulo.

Solución:

- Pensemos en la desigualdad triangular, si a, b y c son segmentos de línea, entonces

$$\begin{aligned} a+b &> c \\ a+c &> b \\ b+c &> a \end{aligned}$$

- Considerando las longitudes de los segmentos $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7$
- Notemos que $l_2 \geq l_1 \geq 1$
- $l_3 > l_1 + l_2 \geq 2$

Problema I

Se proporcionan siete segmentos de línea, con longitudes no mayores a 10 centímetros y no menores a 1 centímetro. Muestre que uno puede elegir tres de ellos para representar los lados de un triángulo.

Solución:

- Pensemos en la desigualdad triangular, si a, b y c son segmentos de línea, entonces

$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a \end{aligned}$$

- Considerando las longitudes de los segmentos $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7$
- Notemos que $l_2 \geq l_1 \geq 1$
- $l_3 > l_1 + l_2 \geq 2$
- $l_4 \geq 3$, $l_5 \geq 5$, $l_6 \geq 8$, $l_7 \geq 13$

Problema I

Se proporcionan siete segmentos de línea, con longitudes no mayores a 10 centímetros y no menores a 1 centímetro. Muestre que uno puede elegir tres de ellos para representar los lados de un triángulo.

Solución:

- Pensemos en la desigualdad triangular, si a, b y c son segmentos de línea, entonces

$$\begin{aligned} a+b &> c \\ a+c &> b \\ b+c &> a \end{aligned}$$

- Considerando las longitudes de los segmentos $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7$
- Notemos que $l_2 \geq l_1 \geq 1$
- $l_3 > l_1 + l_2 \geq 2$
- $l_4 \geq 3$, $l_5 \geq 5$, $l_6 \geq 8$, $l_7 \geq 13$
- Pero $l_i < 10$, lo que hace que se forme el triángulo.

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos
segmentos

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

tal que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

tal que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Decimos que ellos estan en proporción aurea

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

tal que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Decimos que ellos estan en proporción aurea

Simplificando la expresión conseguimos

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

tal que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Decimos que ellos estan en proporción aurea

Simplificando la expresión conseguimos

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

si tomamos a $\phi = \dfrac{a}{b}$

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

tal que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Decimos que ellos estan en proporción aurea

Simplificando la expresión conseguimos

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

si tomamos a $\phi = \dfrac{a}{b}$ LLegamos a que

$$1 + \phi^{-1} = \phi$$

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

tal que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Decimos que ellos estan en proporción aurea

Simplificando la expresión conseguimos

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

si tomamos a $\phi = \dfrac{a}{b}$ LLegamos a que

$$1 + \phi^{-1} = \phi$$

que es

$$\phi + 1 = \phi^2$$

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

tal que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Decimos que ellos estan en proporción aurea

Simplificando la expresión conseguimos

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

si tomamos a $\phi = \dfrac{a}{b}$ LLegamos a que

$$1 + \phi^{-1} = \phi$$

que es

$$\phi + 1 = \phi^2$$

así

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

La Razón Dorada

Si podemos dividir un segmento en dos segmentos

tal que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Decimos que ellos estan en proporción aurea

Simplificando la expresión conseguimos

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

si tomamos a $\phi = \frac{a}{b}$ LLegamos a que

$$1 + \phi^{-1} = \phi$$

que es

$$\phi + 1 = \phi^2$$

así

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

La solución positiva es:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989\ldots$$

Fibonacci y la razón Aurea

Si el *n*-ésimo número de fibonacci lo dividimos por su predecesor obtenemos:

Fibonacci y la razón Aurea

Si el n-ésimo número de fibonacci lo dividimos por su predecesor obtenemos:

f_n	f_{n-1}	$\dfrac{f_n}{f_{n-1}}$
1	1	1
2	1	2
3	2	1.5
5	3	1.66666666666
8	5	1.6
13	8	1.625
21	13	1.615384
34	21	1.619047
55	34	1,617647
89	55	1.6181818

Fibonacci y la razón Aurea

Si el *n*-ésimo número de fibonacci lo dividimos por su predecesor obtenemos:

f_n	f_{n-1}	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$
1	1	1
2	1	2
3	2	1.5
5	3	1.66666666666
8	5	1.6
13	8	1.625
21	13	1.615384
34	21	1.619047
55	34	1,617647
89	55	1.6181818

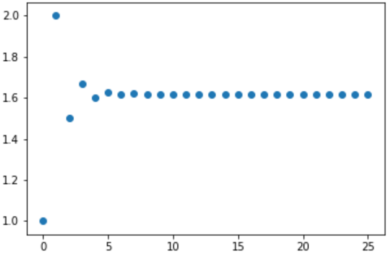
Lo que graficamente vemos como:

Fibonacci y la razón Aurea

Si el n-ésimo número de fibonacci lo dividimos por su predecesor obtenemos:

f_n	f_{n-1}	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$
1	1	1
2	1	2
3	2	1.5
5	3	1.66666666666
8	5	1.6
13	8	1.625
21	13	1.615384
34	21	1.619047
55	34	1,617647
89	55	1.6181818

Lo que graficamente vemos como:

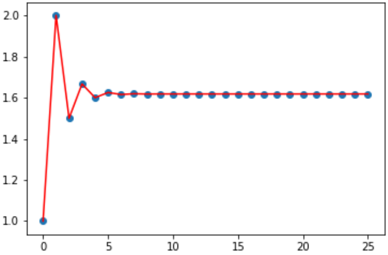


Fibonacci y la razón Aurea

Si el n-ésimo número de fibonacci lo dividimos por su predecesor obtenemos:

f_n	f_{n-1}	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$
1	1	1
2	1	2
3	2	1.5
5	3	1.66666666666
8	5	1.6
13	8	1.625
21	13	1.615384
34	21	1.619047
55	34	1,617647
89	55	1.6181818

Lo que graficamente vemos como:

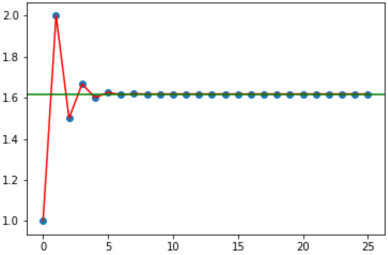


Fibonacci y la razón Aurea

Si el *n*-ésimo número de fibonacci lo dividimos por su predecesor obtenemos:

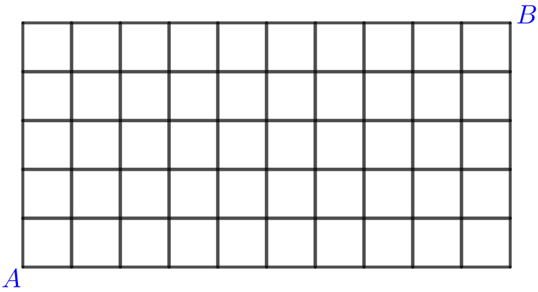
f_n	f_{n-1}	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$
1	1	1
2	1	2
3	2	1.5
5	3	1.66666666666
8	5	1.6
13	8	1.625
21	13	1.615384
34	21	1.619047
55	34	1,617647
89	55	1.6181818

Lo que graficamente vemos como:

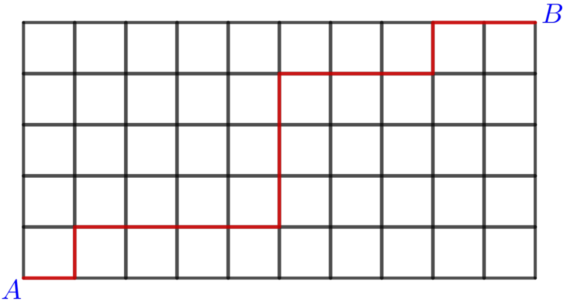


Problema II

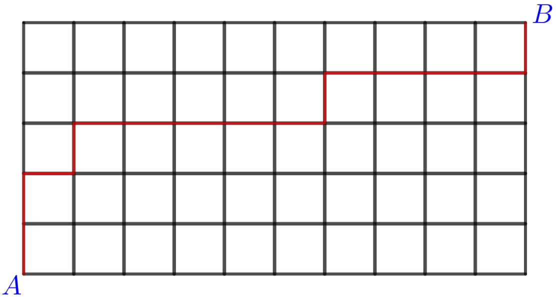
En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



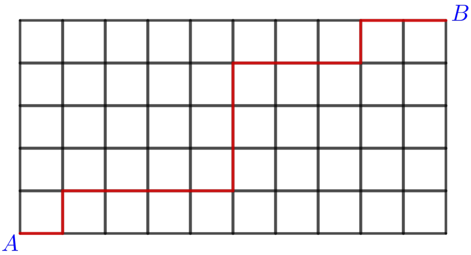
Solución



Solución

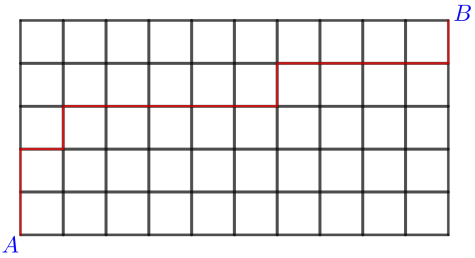


Solución



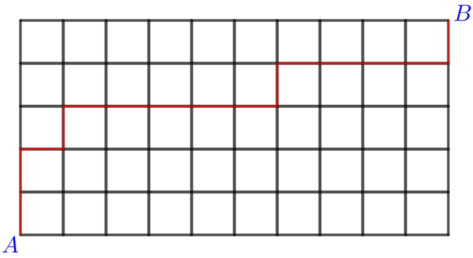
$DADDDDAAADDDADD$

Solución



$AADADDDDDADDDDA$

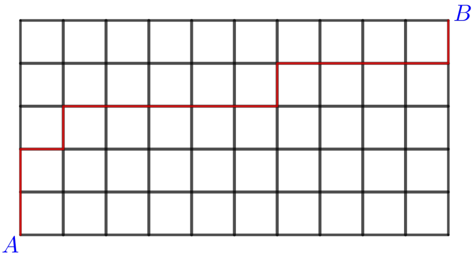
Solución



$AADADDDDDADDDDA$

Note que en todos el número de movimientos a la derecha es 10 y hacia arriba son 5, y podemos elegir como escoger los que van hacia arriba o los que van hacia la derecha

Solución

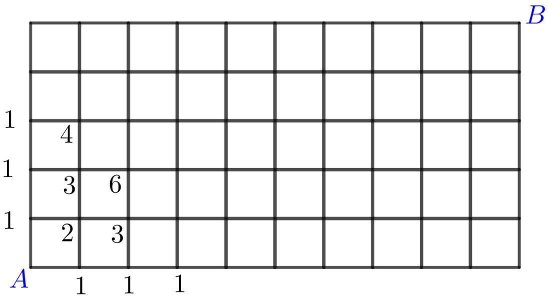


$$AADADDDDDADDDDA$$

Note que en todos el número de movimientos a la derecha es 10 y hacia arriba son 5, y podemos elegir como escoger los que van hacia arriba o los que van hacia la derecha Esto se cuenta

$$\binom{10+5}{5} = \binom{10+5}{10} = 3003$$

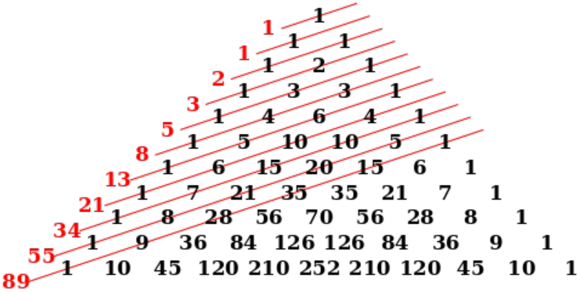
Otra Forma



Triángulo de Pascal

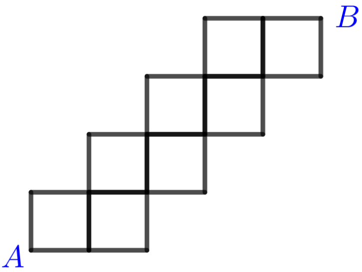
$n = 0$							1							
$n = 1$						1		1						
$n = 2$					1		2		1					
$n = 3$				1		3		3		1				
$n = 4$			1		4		6		4		1			
$n = 5$		1		5		10		10		5		1		
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1	

Triángulo de Pascal



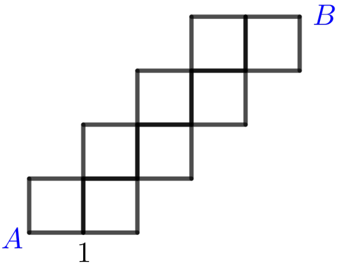
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



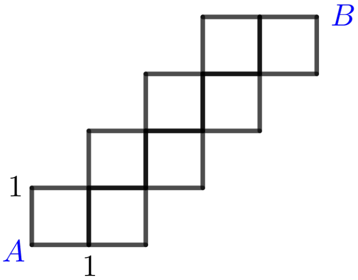
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



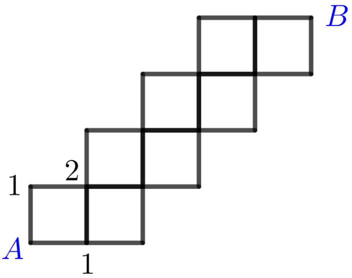
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



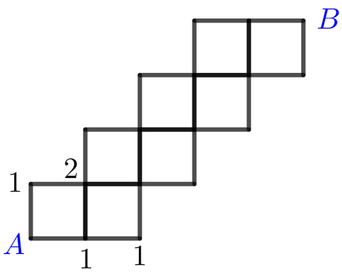
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



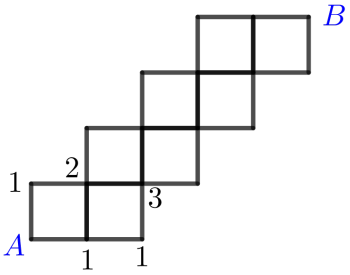
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



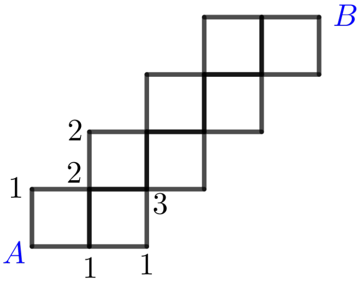
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de *A* hasta *B*, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



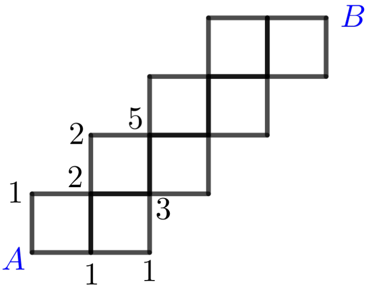
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



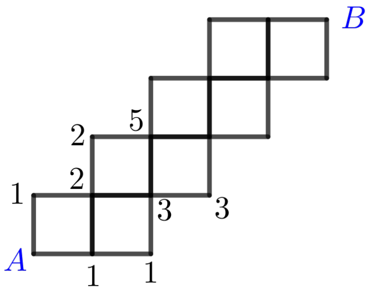
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



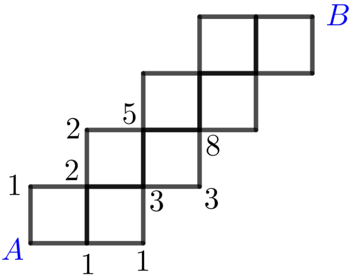
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de *A* hasta *B*, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



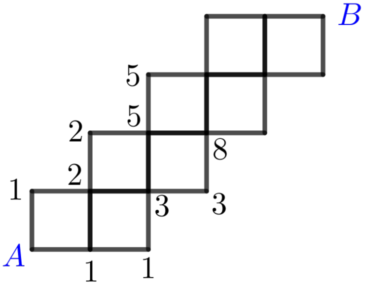
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de *A* hasta *B*, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



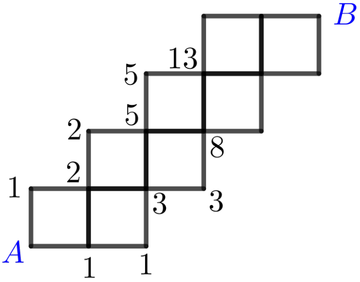
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de *A* hasta *B*, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



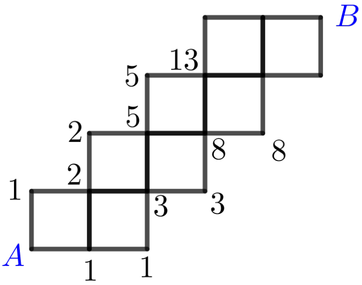
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de *A* hasta *B*, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



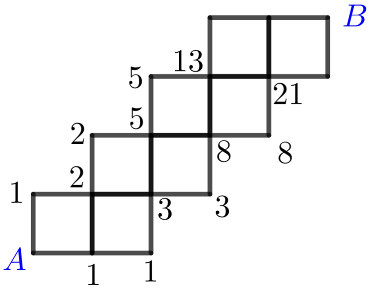
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



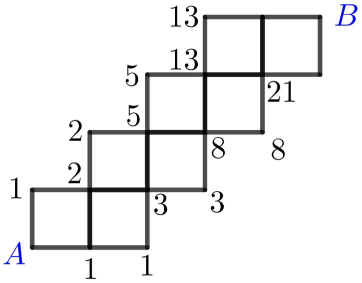
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de *A* hasta *B*, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



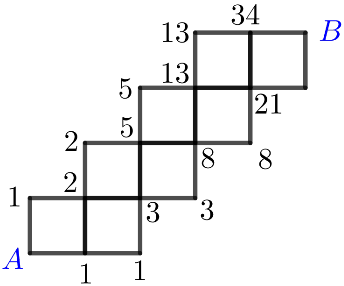
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de *A* hasta *B*, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



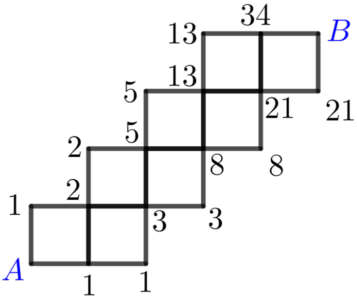
Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



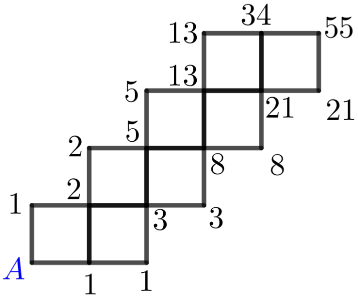
Problema III

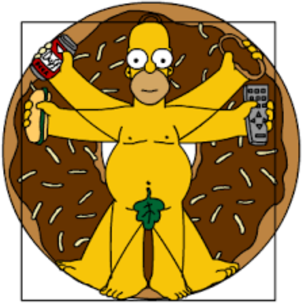
En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de A hasta B, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba



Problema III

En la siguiente figura, ¿cuántos caminos hay para llegar de *A* hasta *B*, si solo nos podemos mover hacia la derecha y hacia arriba





GRAACCCIIIIIAAAAAAAASSSSSSSSSSSSS