Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Universidad de Nariño
Nivel III (Grados 10 y 11)
Entrenamiento No. 5: Álgebra

> *En los momentos de crisis solo la imaginación es más importante que el conocimiento.*

Albert Einstein, *Físico alemán de origen judío, nacionalizado después suizo, austriaco y estadounidense*, 14 de marzo de 1879 – 18 de abril de 1955.

1. Emmy Noether (1882-1935)

https://mujeresconciencia.com

Recibió desde pequeña el amor por las matemáticas por influencia de su padre, Max Noether, quien era profesor de Álgebra. Gracias a su dedicación obtuvo su doctorado en la Universidad de Heidelberg en 1868.

Emmy fue una de las grandes mentes matemáticas del siglo XX. Considerada la madre del álgebra abstracta, sus trabajos abrieron caminos nuevos que marcaron de manera fundamental la trayectoria seguida por las matemáticas contemporáneas, y su análisis de los grupos de simetrías que aparecen en las teorías especial y general de la relatividad permitió entender y resolver el problema de la conservación de la energía en la teoría general de la relatividad de Einstein. Fue considerada por David Hilbert, Albert Einstein y otros personajes como la mujer más importante en la historia de la matemática.

2. Problema resuelto

(ORM-Univalle, 2016) Sean a y b reales positivos tales que

$$\frac{a+2b}{b} = \frac{a+b}{a}$$

¿Cuál es el valor de $\frac{(a+b)^2}{ab}$?

a) $3+\sqrt{3}$ b) $2+2\sqrt{2}$ c) $\boxed{\sqrt{5}+2}$ d) $-1+\sqrt{5}$ e) $1+\sqrt{2}$

Solución. De la igualdad se obtiene la expresión $\frac{a}{b}+2 = 1+\frac{b}{a}$ y así $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+1=0$. Si denotamos por $x=\frac{a}{b}$ se obtiene la ecuación

$$x^2+x-1=0,$$

de donde se sigue que

$$x = \frac{a}{b} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Dado que $a, b > 0$, se elige a $x = \frac{a}{b} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalmente

$$\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} + 1 + 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} + 1 + \frac{a}{b} + 2 = 2\frac{a}{b} + 3 = -1 + \sqrt{5} + 3 = \sqrt{5} + 2.$$

$\square$

3. Problemas propuestos

1. (OMM, 2003) Si 4 peras y 2 naranjas cuestan 5400 pesos y 2 naranjas y 4 uvas cuestan 7000 pesos. ¿Cuánto tengo que pagar en total por una pera, una naranja y una uva?

   a) 7800 pesos b) 9000 pesos c) 8000 pesos d) 3100 pesos e) 4800 pesos

2. (OLCOMA, 2016) Si $x^y = 2$, entonces el valor numérico de $\sqrt{2}y + \left(\frac{1}{x}\right)^{-2y} - x^{\frac{y}{2}}y$ es

   a) $\frac{1}{4}$ b) 4 c) $4+\sqrt{2}$ d) 2 e) $\frac{1}{4} - \sqrt{2}$

3. (Santos, 2007) El resultado de calcular mentalmente $(123456789)^2 - (123456791)(123456787)$ es

   a) 123456788 b) 4 c) 0 d) -5 e) -123456788

4. (Nieto, 2015) ¿Cuántos ceros deben insertarse en el lugar de * en la expresión decimal 1,*1 para obtener un número menor que $\dfrac{2020}{2019}$ pero mayor que $\dfrac{20020}{20019}$?

   a) 1 b) 4 c) 2 d) 5 e) 3

5. (OLCOMA, 2015) Si a y b son números reales positivos tales que

   $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{3} \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$$

   entonces el valor de ab es igual a

   a) $\dfrac{3}{8}$ b) $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{8}{3}$ d) $\dfrac{5}{3}$ e) 3

6. (OMM, 2004) Considere la lista 1, 2, 2, 3, 3, 3, $\ldots$, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, $\ldots$ ¿Cuál es el número escrito en la posición 2004?

   a) 54 b) 57 c) 60 d) 63 e) 67

English challenge

7. (AoPS, 2020) Place the numbers from 1 to 12 in the circles, so that the sum of the integers along each side of the square is 25.