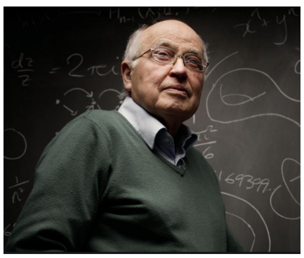
Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Universidad de Nariño
Nivel III (Grados 10 y 11)
Entrenamiento No. 2: Geometría (Profesores)

> *"Lograr aquello que has soñado te hace feliz, pero sobre todo, te hace feliz recordar el esfuerzo empleado para lograrlo."*
>
> Rafael Nadal, *Tenista español, 12 veces campeón de Roland Garros*, 3 de junio de 1986 –

1. Michael Atiyah (1929-2019)

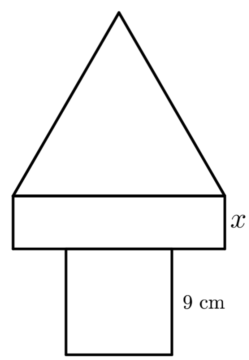


www.gaussianos.com

Fue un matemático británico considerado como el más importante del siglo XX y lo que llevamos del siglo XXI. Sus contribuciones se centran principalmente en Geometría y Topología. En 1966 fue galardonado con la Medalla Fields por la creación de la teoría K, por una generalización del teorema del punto fijo de Lefschetz y por el teorema de Atiyah-Singer. Por este último recibió en 2004, junto a Singer, el premio Abel.
En un pequeño poema, resumía su forma de trabajar: "A la luz del día, los matemáticos verifican sus ecuaciones y sus pruebas, sin dejar ninguna piedra sin mover en su búsqueda del rigor. Pero, por la noche, bajo la luna llena, sueñan que flotan entre las estrellas y se maravillan ante el misterio de los cielos: están inspirados. Sin sueños no hay arte, ni matemáticas, ni vida".

2. Problema resuelto

(Canguro matemático) La torre de la figura está formada por tres polígonos: un cuadrado, un rectángulo y un triángulo equilátero. El perímetro de las tres estructuras es el mismo. El lado del cuadrado mide 9 cm de largo. ¿Cuál es la longitud del lado del rectángulo marcada con x?



a) 4 cm b) $\boxed{\text{6 cm}}$ c) 5 cm d) 7 cm e) 8 cm

Solución. Dado que el lado del cuadrado mide 9 cm, se sigue que su perímetro es $(4)(9) = 36$ **cm**. Ahora, si denotamos con y al lado del triángulo equilátero y utilizando la condición que el perímetro de las tres figuras es el mismo, se obtiene:

$$\begin{aligned} 3y &= 36 \\ y &= \frac{36}{3} \\ y &= 12 \end{aligned}$$

Luego, cada lado del triángulo mide 12 cm y como su base coincide con el lado superior del rectángulo, entonces el perímetro de este es igual a **2 veces la base del triángulo + 2 veces la altura del rectángulo**. Como la altura del rectángulo es igual a la incógnita x, se establece la ecuación

$$\begin{aligned} 2(12) + 2x &= 36 \\ 24 + 2x &= 36 \\ 2x &= 36 - 24 \\ x &= \frac{12}{2} \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud del lado x es 6 cm. □

3. Problemas propuestos

1. (Canguro Matemático) Un cuadrado grande se divide en cuadrados más pequeños, como se muestra en la figura. ¿Qué fracción del cuadrado grande es de color gris?

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{7}$

d) $\boxed{\frac{4}{9}}$

e) $\frac{5}{12}$

Idea para la solución: Completar la subdivisión del cuadrado grande, y expresar la fracción en términos del número de cuadrados pequeños.

2. (ORM-Univalle, 2017) En la figura, $MNPQ$ es un cuadrado. El área del cuadrado C es $36\,cm^2$. ¿Cuál es el área de la superficie sombreada?

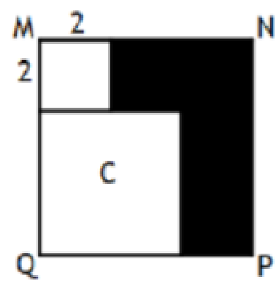
a) $\boxed{24 \text{ cm}^2}$

b) 18 cm^2

c) 20 cm^2

d) 28 cm^2

e) 10 cm^2



Idea para la solución: Calcular el área del cuadrado más grande y restarle las áreas no sombreadas.

3. (ORM-Univalle, 2018) Sabiendo que en la siguiente figura cada uno de los bordes (una semicircunferencia y dos cuartos de circunferencia) se obtienen de un círculo de radio de 1 cm, ¿cuál es el área de la figura?

a) $2\pi \text{ cm}^2$

b) $\frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$

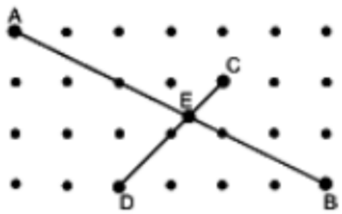
c) $\boxed{2 \text{ cm}^2}$

d) $\pi \text{ cm}^2$

e) $\frac{3\pi}{2} \text{ cm}^2$

Idea para la solución: Formar un rectángulo con los 2 cuartos de circunferencia y calcular el área.

4. (OC-UAN, 2000) En el diagrama se muestran 28 puntos reticulares, cada uno de los cuales dista una unidad de sus vecinos más cercanos.



El segmento AB se cruza con el segmento CD en el punto E. La longitud del segmento AE es:

a) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

c) $\boxed{\frac{5\sqrt{5}}{3}}$

d) $2\sqrt{5}$

e) $\frac{5\sqrt{65}}{9}$

Idea para la solución: Utilizar el teorema de Pitágoras para establecer distancias.

5. (OMM-Problemas introductorios) En el rectángulo $ABCD$ de la figura, M y N son los puntos medios de AB y CD, respectivamente, y P y Q son las respectivas intersecciones de AC con DM y con NB. Suponiendo que AB mide 5 cm y que AD mide 3 cm, ¿cuántos centímetros cuadrados tiene de superficie el cuadrilátero $MPQB$?

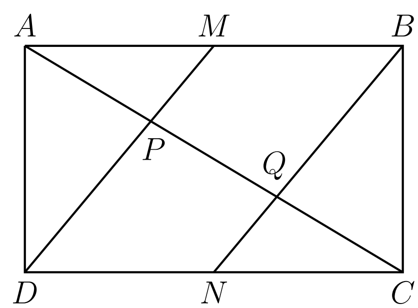
a) 2,75

b) 3

c) 3,25

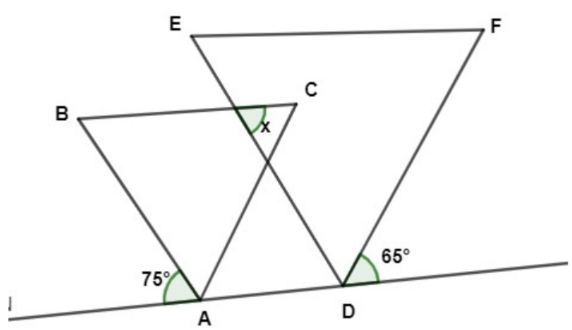
d) $\boxed{3{,}75}$

e) 4



Idea para la solución: Calcular el área del cuadrilátero $MBND$.

6. (OMPR, 2001-2004) En la siguiente figura los triángulos ABC y DEF son equiláteros.



El valor del ángulo x es:

a) $\boxed{40^\circ}$

b) 50°

c) 60°

d) 30°

e) 20°

Idea para la solución: Utilizar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 360° y que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

English challenge

7. (COMATEQ-UPRM, 2017) A blue square has a perimeter of 88cm. A red square has an area that is 99 times the area of the blue square. What is the radius of the circle that passes through the vertices of the red square?

Idea para la solución: Visita el solucionario del año 2017 de la COMATEQ en el siguiente link webwork-test.uprm.edu

Referencias

[1] ORM-Univalle, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad del Valle. Recuperado de http://orm.univalle.edu.co/olimpiadas-anteriores.

[2] OMPR, Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico. Recuperado de https://om.pr/biblioteca

[3] OMR-UIS, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Recuperado de http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas-secundaria

[4] OC-UAN, Olimpiada Colombiana de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño. Recuperado de http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas/pruebas

[5] Canguro Matemático, Recuperado de https://www.canguromat.org.es/

[6] ORM-UdeA, Olimpiadas Universidad de Antioquia. Recuperado de https://olimpiadasudea.co/

[7] UKMT, United Kingdom Mathematics Trust. Recuperado de https://www.ukmt.org.uk/

[8] OMM, Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas. Recuperado de http://ichi.fismat.umich.mx/omm/

Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesoras de Apoyo
E-mail: orm@udenar.edu.co
Página web: orm.udenar.edu.co
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2020