Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Universidad de Nariño
Nivel III (Grados 10 y 11)
Entrenamiento No. 6: Geometría (Profesores)

> *Las matemáticas son la gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía*
>
> Isócrates, *Orador y profesor ateniense*, Atenas, 436 a. C. - ibíd. 338 a. C

1. María Cumplido (1992)

https://elpais.com/ciencia

Matemática e investigadora española que en este año fue galardonada con uno de los Premios de Investigación Matemática Vicent Caselles de la Real Sociedad Matemática Española, uno de los reconocimientos más prestigiosos en investigación matemática de España. En 2018 obtuvo el segundo premio de la Fundación Rennes 1 a la mejor tesis en Matemáticas y Ciencias y Tecnologías de la información y comunicación.
Doctora en Matemáticas por la Universidad de Rennes 1 y la Universidad de Sevilla, con tan solo 28 años ha logrado solucionar un problema matemático en el que la comunidad científica llevaba 20 años zozobrando sin éxito, su principal hallazgo ha sido tomar definiciones que son geométricas y llevarlas al álgebra, a los grupos de Artin, es decir, unir geometría con álgebra.

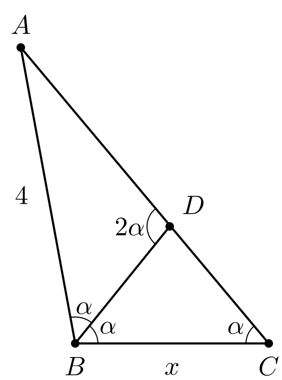
María Cumplido afirma "Los teoremas y algoritmos que se utilizan hoy para nuestros dispositivos fueron descubiertos hace decenas de años. Estoy segura que los matemáticos de entonces empezaron a buscar y pensar porque ese problema o misterio les parecía interesante en sí mismo".

2. Problema resuelto

(OLCOMA, 2016) Si en un ΔABC, $\angle ABC = 2\angle ACB$, $\overline{AC} = 2\,\overline{BC}$ y $\overline{AB} = 4$ entonces $\overline{BC}$ es igual a

a) $\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$ b) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ c) $\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$ d) $\boxed{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$ e) $\dfrac{1+\sqrt{16}}{2}$

Solución. El primer paso es elaborar una figura que represente al problema.



En el gráfico, $\overline{BD}$ bisecta al $\angle ABC$, además observe que $\alpha = \angle ACB$ y $\overline{BC} = x$. De ahí que el triángulo BCD es isósceles y $\angle ADB = 2\alpha$, así los triángulos ABC y ADB son semejantes. Por lo tanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}}$$

lo cual es equivalente a $\dfrac{4}{\overline{AD}} = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{x}{\overline{DB}}$, de donde se obtiene que $\overline{DB} = \overline{DC} = 2$.
Por otro lado, de la igualdad $\dfrac{4}{\overline{AD}} = \dfrac{2x}{4}$ se sigue que

$$\frac{4}{2x-2} = \frac{2x}{4}$$

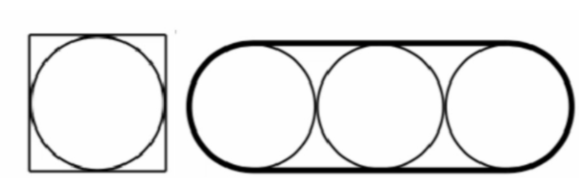
y asi se obtiene la ecuación $x^2 - x - 4 = 0$, cuyas soluciones son $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Como x es positivo se concluye que

$$\overline{BC} = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

□

3. Problemas propuestos

1. (OMM, 2004) El área del cuadrado de la figura es A y el área de cada uno de los círculos es B. ¿Cuánto vale el área encerrada dentro de la línea gruesa?.



a) A+B

b) A+2B

c) 3A

d) $\boxed{\text{2A+B}}$

e) $\dfrac{A-B}{4}$

Idea para la solución: Encuentre el área del cuadrado menos el área del círculo.

2. (ORM-UIS, 2014) El triángulo ABC es equilátero de lado a. Las regiones de circunferencia con centro en los vértices A y B son tangentes entre sí. El valor del perímetro de la región sombreada en términos de a es

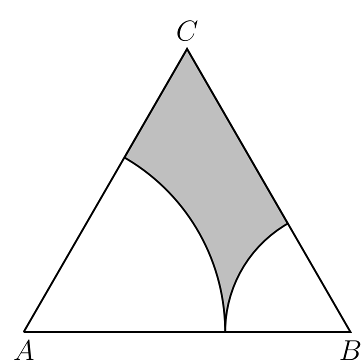
a) $a + \dfrac{2\pi a}{3}$

b) $a + \dfrac{\pi a}{2}$

c) $\boxed{a + \dfrac{\pi a}{3}}$

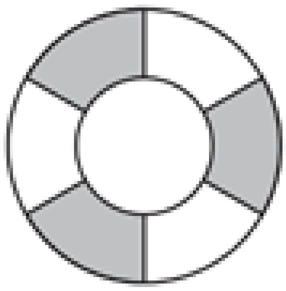
d) $\dfrac{a + \pi a}{2}$

e) $a + \pi a$



Idea para la solución: Suponer que el radio de una de las regiones de circunferencia es igual a r.

3. (UKMT, 2017) El diagrama muestra dos círculos con el mismo centro. El radio del círculo exterior es dos veces el radio del círculo interior. La región entre el círculo interno y el círculo externo se divide en seis segmentos iguales. ¿Qué fracción del área del círculo exterior está sombreada?



a) $\frac{3}{7}$

b) $\boxed{\frac{3}{8}}$

c) $\frac{3}{9}$

d) $\frac{3}{10}$

e) $\frac{3}{11}$

Idea para la solución: Expresar las áreas en términos del radio del círculo interno.

4. (Canguro Matemático Méxicano, 2018) En el triángulo de la figura se cumple que $AB = BC$. Los puntos K y L se han marcado en los lados AB y BC, respectivamente, de forma que $AK = KL = LK$ y $KB = AC$. ¿Cuál es la medida del $\angle ABC$?

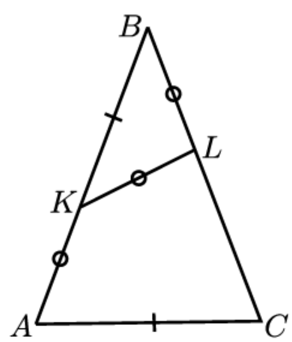
a) $30°$

b) $35°$

c) $\boxed{36°}$

d) $40°$

e) $45°$



Idea para la solución: Determinar el valor del ángulo BAC.

5. (IMO-MATH training) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $AB \perp BC$, $AC \perp CD$, $AB = 18$, $BC = 21$ y $CD = 14$. ¿Cuál es el valor del perímetro de $ABCD$?

a) 80 b) 85 c) 53 d) 48 e) $\boxed{84}$

Idea para la solución: Elaborar una figura que represente el problema.

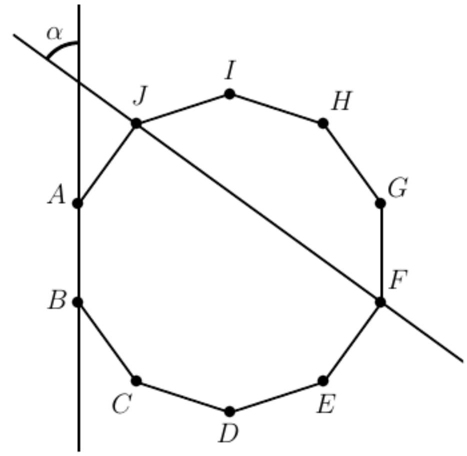
6. (OLCOMA, 2014) Sea ΔABC rectángulo en $\angle C$ y D un punto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{CD}$ es la altura. Si $AD = 3$ y $DB = 12$ entonces la medida de $\overline{CD}$ es igual a

a) $\boxed{6}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $6\sqrt{2}$ d) $6\sqrt{5}$ e) 12

Idea para la solución: Elaborar una figura que represente el problema y plantear algunas ecuaciones.

English challenge

7. (COMATEQ, 2020). Determine the value of the angle marked with α in the following figure, knowing that $ABCDEFGHIJ$ is a regular decagon.



Idea para la solución: Visita el solucionario del año 2020 de la COMATEQ en el siguiente link webwork-test.uprm.edu

Referencias

[1] Canguro Matemático Méxicano. Recuperado de http://ichi.fismat.umich.mx/omm/

[2] IMO-MATH, Olympiad Training Materials. Recuperado de https://www.imomath.com/

[3] OLCOMA, Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas. Recuperado de http://olcoma.com/

[4] OMM, Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Recuperado de http://www.ommenlinea.org/

[5] ORM-UIS, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Recuperado de http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas-secundaria

[6] UKMT, United Kingdom Mathematics Trust. Recuperado de https://www.ukmt.org.uk/

Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesoras de Apoyo
E-mail: orm@udenar.edu.co
Página web: orm.udenar.edu.co
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2020