Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Universidad de Nariño
Nivel III (Grados 10 y 11)
Entrenamiento No. 4: Combinatoria (Profesores)

> *Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica:* ***La Voluntad****.*

Albert Einstein, *Físico alemán de origen judío, nacionalizado después suizo, austriaco y estadounidense*, 14 de marzo de 1879 – 18 de abril de 1955.

1. John Forbes Nash Jr. (1928-2015)

Matemático estadounidense. Especialista en teoría de juegos, geometría diferencial y ecuaciones en derivadas parciales. Fue laureado con el Premio Nobel de Economía en 1994 por sus aportes a la teoría de juegos y los procesos de negociación, junto a Reinhard Selten y John Harsanyi, y a compartir con Louis Nirenberg el Premio Abel en 2015, el equivalente al Nobel en Matemáticas.

Su vida fue retratada en la novela *A Beautiful Mind* (Una mente brillante) de Sylvia Nasar que fue candidata al Premio Pulitzer en 1998, adaptada posteriormente en la película del mismo nombre ganadora de cuatro Premios Oscar en el 2001, entre ellos el de mejor película.

www.elmundo.es

2. Problema resuelto

(Pearson-Guide, 2010) ¿Cuántas combinaciones de números de 5 cifras, divisibles por 3, se puede formar usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5 sin repetir ningún dígito?

a) $\boxed{216}$ b) 240 c) 600 d) 2300 e) 3125

Solución. Sabemos que un número es divisible por 3 cuando la suma de todos sus dígitos es múltiplo de 3. Tenemos un conjunto de 6 números $\{0,1,2,3,4,5\}$, pero sólo hay que usar 5 de ellos. Cuando tomamos la suma de los 6 números proporcionados, obtenemos $0+1+2+3+4+5=15$. Lo anterior nos dice que si N es uno de dichos números entonces la suma de sus dígitos es igual a 15 menos el dígito faltante en N. Construimos el listado de los conjuntos de 5 cifras son sus respectivas sumas.

Dígitos de N	Suma dígitos	¿Múltiplo de 3?
$\{1,2,3,4,5\}$	$15-0=15$	Si
$\{0,2,3,4,5\}$	$15-1=14$	No
$\{0,1,3,4,5\}$	$15-2=13$	No
$\{0,1,2,4,5\}$	$15-3=12$	Si
$\{0,1,2,3,5\}$	$15-4=11$	No
$\{0,1,2,3,4\}$	$15-5=10$	No

Del anterior listado se concluye que el conjunto de las cifras de N puede ser $\{1,2,3,4,5\}$ o $\{0,1,2,4,5\}$. Para el primer conjunto tenemos 5 lugares y 5 números distintos de cero, que se pueden combinar en 5! formas, es decir $5\times4\times3\times2\times1=120$.

De manera similar para el segundo conjunto $\{0,1,2,4,5\}$ hay 120 combinaciones, pero eliminaremos los números que comienzan con 0. Es decir $120-(120/5)=120-24=96$.

Finalmente, el total de combinaciones es $120+96=216$.

□

3. Problemas propuestos

1. (ACM, 2010) ¿Cuántos números de tres cifras tienen la propiedad de que el dígito central es el promedio de los otros dos?

   a) 9 b) 12 c) 16 d) 25 e) $\boxed{45}$

   Idea para la solución: Para que el promedio de dos dígitos sea otro dígito, ambos deben tener igual paridad.

2. (UKMT, 2016) Pedro tiene que elegir un código de tres dígitos para el candado de su bicicleta. Los dígitos se pueden elegir del 1 al 9. Para ayudarlo a recordarlos, Pedro elige tres dígitos diferentes en orden creciente, por ejemplo 278. ¿Cuántos códigos se pueden elegir?

   a) 779 b) 504 c) 168 d) $\boxed{84}$ e) 9

   Idea para la solución: Realizar el conteo fijando el dígito del medio.

3. (OC-UAN, 2000) Cada una de las placas de los vehículos en una población determinada contienen tres letras. La primera letra se escoge del conjunto $\{C,H,L,P,R\}$, la segunda letra se escoge del conjunto $\{A,I,O\}$ y la tercera del conjunto $\{D,M,N,T\}$. Por ejemplo la placa **PAM**.

   Cuando hubo que expedir más placas por la cantidad de vehículos, se determinó añadir dos nuevas letras. Se puede añadir las dos letras nuevas a uno de los conjuntos, o bien, se puede añadir una letra nueva a uno de los conjuntos y la otra letra nueva a otro conjunto. ¿Cuál es el mayor número de nuevas placas que se puede hacer cuando se añaden las dos nuevas letras?

   a) 24 b) 30 c) 36 d) $\boxed{40}$ e) 60

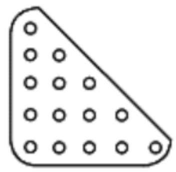
   Idea para la solución: Determinar el número de placas formadas en cada uno de los casos, teniendo en cuenta que este número es igual al producto de las cardinalidades de cada uno de los tres conjuntos.

4. (Pearson-Guide, 2010) ¿Cuántos números de nueve cifras diferentes se pueden formar a partir del número 223355888 reordenando sus dígitos para que las cifras impares ocupen posiciones pares?

   a) 16 b) 36 c) $\boxed{60}$ d) 82 e) 180

   Idea para la solución: Note que uno de estos nuevos números se puede construir a partir de un número de 4 cifras con los dígitos 3 y 5 (por ejemplo 3355), y un número de 5 cifras con los dígitos 2 y 8 (por ejemplo 22888).

5. (OC-UAN, 2000) Hay 5 balotas amarillas, 4 balotas rojas, 3 verdes, 2 azules y 1 anaranjada que se van a colocar en un tablero triangular. ¿De cuántas maneras pueden colocarse las balotas de tal modo que ninguna fila (horizontal) ni ninguna columna (vertical) contenga dos balotas del mismo color?



a) 0 b) $\boxed{1}$ c) $5!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!$ d) $\dfrac{15!}{5!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}$ e) $15!$

Idea para la solución: Construir una de dichas figuras.

6. (OMM, 2003) Dayana escribe la lista de todos los números formados por los dígitos 1, 2, 3 y 4 sin repetir. ¿Cuánto vale la suma de todos los números en la lista?

a) 55550 b) 99990 c) $\boxed{66660}$ d) 100000 e) 98760

Idea para la solución: Determinar cuántas veces se repite cada dígito en la cifra de las unidades, decenas, centenes y la cifra de miles.

English challenge

7. (Pearson-Guide, 2014) Santiago wishes to go from Pasto to Bogotá by bus and return from Bogotá to Pasto by air. There are six different buses from Pasto to Bogotá and five different flights from Bogotá to Pasto. In how many ways can he perform the journey?

a) 6 b) 5 c) 30 d) 0 e) 11

Idea para la solución: Usar el principio de la multiplicación.

Referencias

[1] ACM, Nieto S. José, H y otros, Olimpiadas de Matemáticas 2010 (OJM, OMCC, OIM, IMO), Problemas y Soluciones. Recuperado de http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/OJM%202010%20Problemas%20y%20Soluciones.pdf

[2] OC-UAN, Olimpiada Colombiana de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño. Recuperado de http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas/pruebas

[3] OMM, García Luis y otros, Problemas para la 17a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Recuperado de http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/folletos/Introductorio_17.pdf

[4] Pearson-Guide, Dinesh Khattar, The Pearson-Guide to Complete Mathematics for the AIEEE, 3rd Edition 2010, Departament of Mathematics, University of Delhi.

[5] Pearson-Guide, Dinesh Khattar, The Pearson-Guide to Quantitative Aptitude for Competitive Examinations Pearson Education, 3rd Edition 2014, Departament of Mathematics, University of Delhi.

[6] UKMT, UK Senior Mathematical Challenge, Organised by the United Kingdom Mathematics Trust and supported by Institute and Faculty of Actuaries. Recuperado de https://www.ukmt.org.uk/sites/default/files/ukmt/senior-mathematical-challenge/SMC_QP16.pdf

[7] Pearson-Guide; Khattar, D., (2014). The Pearson-Guide to Quantitative Aptitude for Competitive Examinations Pearson Education, 3rd ed. Departament of Mathematics, University of Delhi.

Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesoras de Apoyo
E-mail: orm@udenar.edu.co
Página web: http://orm.udenar.edu.co/
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2020