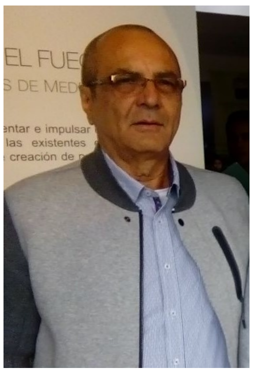
Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Universidad de Nariño
Nivel III (Grados 10 y 11)
Entrenamiento No. 8: Combinatoria (Profesores)

> *No te rindas, pues la vida es eso; continuar el viaje, perseguir tus sueños, destrabar el tiempo, correr los escombros, y destapar el cielo.*

Mario Benedetti, *Escritor, poeta, dramaturgo y periodista uruguayo*, 14 de septiembre de 1920 – 17 de mayo de 2009.

1. Gilberto García Pulgarín (1949 -)



scienti.minciencias.gov.co

Nació en el municipio de Anserma en Caldas - Colombia, es Ingeniero Civil de la Universidad de Medellín y fue Profesor titular del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia. En 1983 finalizó la Maestría en Matemáticas en la Universidad del Valle. Es Co-fundador del grupo de investigación Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones: ERM (ALTENUA). Sus áreas de actuación son principalmente álgebra, teoría de números, combinatoria y resolución de problemas. Ha desarrollado proyectos para mejorar y fomentar la pasión por las matemáticas como el *Club de Amigos de la Matemática*, CLAMA y los *Semilleros de matemáticas* de la UDEA, cuya filosofía inicial según el propio Gilberto es: "Estimular el amor por las Matemáticas a través de la resolución de problemas".

Gilberto ha sido por muchos años, y sigue siendo un mentor para muchos estudiantes interesados en las matemáticas. Su labor tanto dentro del aula, como por fuera de ella, ha sido un motor que ha llevado a muchos de sus estudiantes a continuar su educación en programas de posgrado y a querer transmitir de igual forma su pasión por las matemáticas con estudiantes y sociedad en general.

2. Problema resuelto

(OMM, 2014) Se tiene un conjunto X de 6 números enteros. Se sabe que de todas las posibles combinaciones de 3 elementos distintos de X, exactamente la mitad tiene sus tres elementos pares. ¿Cuántos enteros pares hay en X?

a) 2 b) 3 c) $\boxed{5}$ d) 6 e) 4

Solución. Primero recordemos que el número total de combinaciones posibles de 3 elementos de X es igual a

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20.$$

De donde se obtiene que exactamente 10 subconjuntos de tres elementos de X deben cumplir con la condición, es decir que sus tres enteros deben ser pares, además observemos que cada subconjunto de la otra mitad debe contener al menos un impar. Supongamos que P es el subconjunto que contiene a todos los números pares de X. En la siguiente tabla se encuentran el número de subconjuntos de tres elementos de P cuando el conjunto P tiene 3, 4 y 5 elementos.

No. elementos de P	No. subconjuntos de P de tres elementos
3	1
4	4
5	10

Por lo tanto, el número de enteros pares que hay en X es 5. □

3. Problemas propuestos

1. (OLCOMA, 2014) ¿Cuántas maneras distintas se pueden acomodar los números del 1 al 9 en una cuadrícula de 3×3 de tal manera que no hayan dos números de la misma paridad (pares o impares) en celdas que compartan un lado correspondiente?

   a) 144 b) 2.808 c) $\boxed{2.880}$ d) 3.000 e) 2.700

   Idea para la solución: Tener en cuenta la cantidad de números pares e impares que hay entre los números del 1 al 9.

2. (Arjona, 2014) Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros del 0 al 99. Por el proceso de construcción de las cerraduras cada número no puede aparecer más de una vez en la combinación de la cerradura. ¿Cuántas cerraduras diferentes pueden construirse?

   a) 940.000 b) 941.192 c) 941.094 d) $\boxed{970.200}$ e) 970.299

   Idea para la solución: Usar principio de la multiplicación.

3. (OMM, 2002) ¿Cuántos números de 4 dígitos hay de la forma a99b que sean divisibles entre 54?

   a) Ninguno. b) 3 c) 4 d) $\boxed{5}$ e) 7

   Idea para la solución: Recordar que un número es divisible por 54 si es divisible por cada una de las potencias primas de 54.

4. (OLCOMA, 2016) ¿Cuántos números de seis dígitos distintos de la forma $1a2b3c$ son múltiplos de 15?

   a) 12 b) 20 c) $\boxed{22}$ d) 26 e) 24

   Idea para la solución: Recordar los criterios de divisibilidad por 3 y por 5.

5. (Arjona, 2014) Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que

   - La primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive.
   - La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive.
   - Cada una de las restantes cifras es un número entre 0 y 9. ambos inclusive.

   ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?

   a) 810.000 b) 3.240.000 c) $\boxed{6.480.000}$ d) 29.160.000 e) 58.320.000

   Idea para la solución: Principio de la multiplicación.

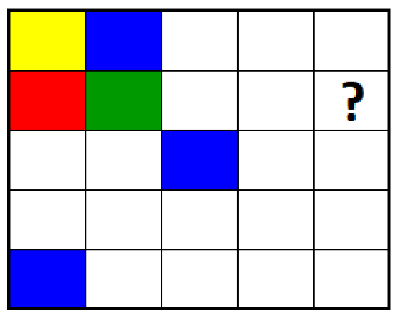
6. (OMG, 2011) Las cifras $1, 2, \ldots, 9$ se escriben en el orden habitual en un arreglo de 3×3 (es decir, en el primer rengl ón están, de izquierda a derecha, 1, 2 y 3, en el segundo renglón 4, 5 y 6, etc) ¿Cuántos números N de siete cifras, todas distintas de cero, tienen la propiedad de que cifras consecutivas en el desarrollo decimal de N son distintas y comparten renglón o columna en el arreglo? (Por ejemplo, $N = 7125474$ tiene la propiedad, pero $N = 3998541$ y $N = 5634782$ no la tienen.)

   a) 9.216 b) 4.096 c) 36.860 d) 9.215 e) $\boxed{36.864}$

   Idea para la solución: Principio de la multiplicación teniendo en cuenta los números del arreglo.

English Challenge

7. (COMATEQ-UDENAR, 2019) You want to paint each rectangle of a 5×5 grid, using the colors yellow, blue, red and green. With the initial distribution of colors in the given figure, which colors could be in the box with question mark, if no rectangle of the grid can share vertices, or sides with squares of the same color?



   Respuesta: La casilla con interrogante se completa con el color **rojo**.

   Idea para la solución: Observa la solución publicada en la sección *Reto matemático*, en el Vol. 14 Num. 1 (2018) de la revista Sigma, en el siguiente link: https://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma

Referencias

[1] Arjona, A. (2014). Problemas de competición sobre combinatoria.Recuperado de https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Combinatoria.pdf

[2] COMATEQ-UDENAR 2019, COmpetencia de MATemáticas por EQuipos. Recuperado de webwork-test.uprm.edu

[3] OLCOMA 2014, I Eliminatoria de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas del 2014. Recuperado de http://olcoma.ucr.ac.cr/images/OLCOMA/MaterialApoyo/IEliminatoria/IIINivel/Nivel3_2014.pdf

[4] OLCOMA 2016, I Eliminatoria de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas del 2016. Recuperado de http://olcoma.ucr.ac.cr/images/OLCOMA/MaterialApoyo/IEliminatoria/IIINivel/Nivel3_2016.pdf

[5] OMG 2011, Material de Entrenamiento Olimpiadas de Matemáticas en Guanajuato del 2010. Recuperado de https://ommgto.files.wordpress.com/2011/03/problemasconteo.pdf

[6] OMM 2002, García Luis y otros, Problemas para la 17a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Recuperado de http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/folletos/Introductorio_17.pdf

[7] OMM 2014, Etapa Semifinal Estatal de la 28^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Recuperado de http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/semifinal/previos/semifinal14.pdf

Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesoras de Apoyo
E-mail: orm@udenar.edu.co
Página web: orm.udenar.edu.co
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2020