Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Universidad de Nariño
Nivel II (Grados 8 y 9)
Entrenamiento No. 9: Misceláneo (Profesores)

> *Nuestra gloria más grande no consiste en no haber caído nunca, sino en habernos levantado después de cada caída.*

Confucio, *Filósofo, profesor y escritor. Reconocido pensador chino cuya doctrina recibe el nombre de confucianismo.*, 28 de septiembre de 551 a. C – 11 de abril de 479 a. C.

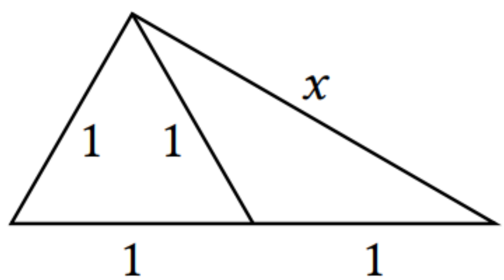
1. Tatiana Toro

scm.org.co

Nació en Bogotá - Colombia. Representó a Colombia en la Olimpiada Internacional de Matemática de 1981. Es matemática de la Universidad Nacional de Colombia, en el año 1989 obtuvo su grado de Master en Matemáticas y en el año 1992, su doctorado en la Universidad de Stanford. Tatiana ganó el Premio Marsha L. Landolt como una de las mejores catedráticas de la Universidad de Washington, donde trabaja desde 1996, gracias a la nominación de estudiantes de posgrado y posdoctorado. Sus áreas de investigación son: teoría geométrica de la medida, ecuaciones diferenciales parciales y análisis armónico. "De la vida como matemática disfruto el proceso de creación y formación de nuevas ideas que son la base de la investigación. Son tanto más gratificantes cuando uno las puede compartir con otros matemáticos, sobre todo aquellos de las generaciones que nos siguen. El descubrimiento matemático es una labor de equipo y entre más diverso el grupo más enriquecedora la experiencia."

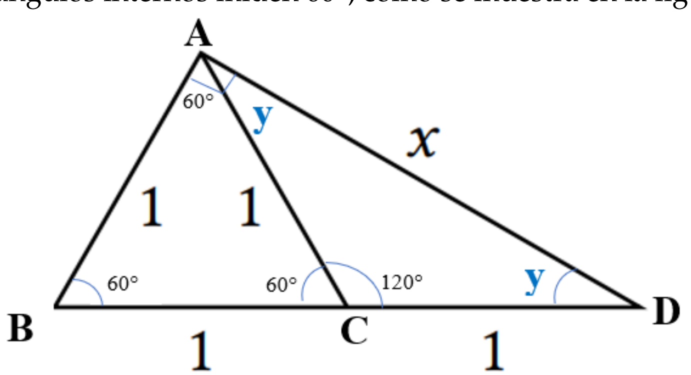
2. Problema resuelto

(NMO, 2018) ¿Cuál es el valor de x en la figura?



Respuesta: El valor de x es $\sqrt{3}$.

Solución. Dado que el triángulo ABC tiene las medidas de sus lados iguales, entonces es un triángulo equilátero y por ende sus ángulos internos miden $60°$, como se muestra en la figura.



En consecuencia $\measuredangle ACD = 180° - 60° = 120°$. Además, podemos observar que el triángulo $\triangle ACD$ es isósceles, por lo que sus ángulos agudos y son iguales. Luego por suma de ángulos podemos determinar el valor de y, pues

$$2y + 120° = 180° \quad \Rightarrow \quad y = 30°$$

Finalmente, observamos que el ángulo $\measuredangle BAD$ es recto y así por el Teorema de Pitágoras obtenemos que

$$x^2 = 2^2 - 1^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3}.$$

□

3. Problemas Propuestos

1. (OMPR, 2018) En una caja hay el doble de caramelos de menta que de fresa y el triple de caramelos de naranja que de menta y fresa juntos. Si en total hay 144 caramelos, ¿cuántos hay de cada sabor?

   Respuesta: La cantidad de caramelos de fresa es 12, la de menta es 24 y la de naranja 108.

   Idea para la solución: Plantee ecuaciones que representen las relaciones expresadas en el enunciado del problema.

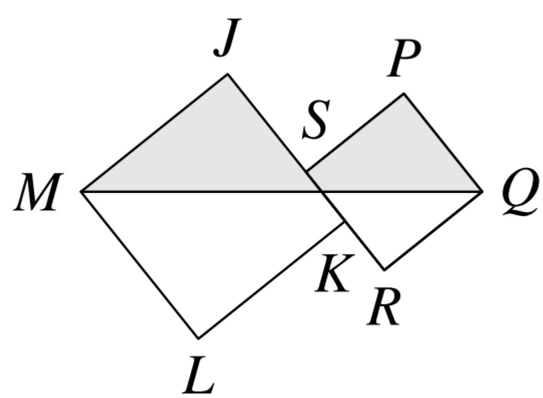
2. (OM-UDEA, 2020) Dados dos números reales positivos a y b. Defina la operación $\triangle$ así, $a \triangle b = \dfrac{a^b}{b^a}$. De las afirmaciones siguientes, la única verdadera es:

   a) $\boxed{a \triangle \frac{1}{a} = \dfrac{1}{\frac{1}{a} \triangle a}}$ b) $a \triangle b = b \triangle a$ c) $\frac{1}{a} \triangle b = \frac{1}{b} \triangle a$

   d) $a \triangle 1 = 1 \triangle a$ e) $a \triangle (b + c) = (a \triangle b) + (a \triangle c)$

   Idea para la solución: Comprobar cuál de las opciones de respuesta dadas cumple la igualdad mediante la operación definida.

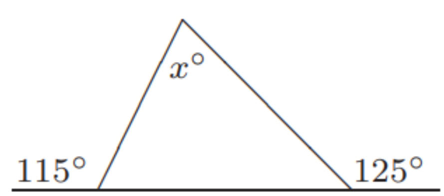
3. (UKMT, 2019) La figura muestra dos cuadrados $JKLM$ y $PQRS$. La longitud de $\overline{JK}$ es de 6 cm y la de $\overline{PQ}$ es de 4 cm. El vértice K es el punto medio del lado $\overline{RS}$. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

   a) 22 cm^2 b) $\boxed{24 \text{ cm}^2}$ c) 26 cm^2
   d) 28 cm^2 e) 30 cm^2

   Idea para la solución: Formar un cuadrado similar a $PQRS$, agregando un punto X para unir $JSPX$. Luego hallar el área del triángulo $\triangle MQX$.

4. (AMT, 2009) En la figura, el valor de x es:

   a) 50° b) 55° c) $\boxed{60°}$ d) 65° e) 70°

   Idea para la solución: Considerar la suma de ángulos internos de un triángulo.

5. (ORM-UDENAR, 2017) Tres parejas de esposos se reúnen para jugar en los carnavales de Negros y Blancos del 2017. Entre todos compran una caja con 16 latas de espuma de carnaval para divertirse. Ángela paga una lata, Bibiana dos y Carmen compra tres latas. Carlos Gutiérrez paga tantas latas como su esposa. Pedro Pérez paga el doble de latas que su esposa y Ramón Martínez el triple de su esposa. ¿Cuál es el apellido del esposo de Ángela?

   a) Pérez b) Gutiérrez c) Gómez d) $\boxed{\text{Martínez}}$ e) Imposible saberlo

   Idea para la solución: Relacione con una incógnita la cantidad de latas compradas por cada hombre y sus respectivas esposas. Luego forme ecuaciones y tenga en cuenta que la suma de todas las incógnitas es 16. Finalmente use la paridad para descartar casos.

6. (ORM-UNIVALLE, 2011) Drácula, el Hombre Lobo y la Momia viven en la misma calle, en casas diferentes y contiguas. Además, salen en horas distintas en la madrugada: 1 a.m., 2 a.m., 3 a.m. No se sabe cuál es la casa específica de cada uno de ellos, ni su hora de salida en la madrugada. Sólo se sabe que:

   - La Momia no sale a las 2 a.m.
   - Drácula sale a la 1 a.m.
   - Drácula vive a la derecha de la Momia.
   - El Hombre Lobo no vive en la casa del medio.
   - El que vive en la casa del medio no sale a la 1 a.m.

   De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es cierta?

   a) El Hombre Lobo vive a la derecha de Drácula y sale a las 3 a.m.

   b) Drácula vive en un extremo y sale a las 3 a.m.

   c) $\boxed{\text{La Momia vive en la casa del medio y sale a las 3 a.m.}}$

   d) La Momia vive en la casa del medio y sale a la 1 a.m.

   e) Drácula vive en la casa del medio y sale a la 1 a.m.

   Idea para la solución: Determinar en primer lugar las horas de salida de la Momia y del Hombre Lobo.

7. (ORM-UIS, 2012) El examen de la prueba clasificatoria de la ORM-UIS tiene doce preguntas de opción múltiple con cinco posibles respuestas únicamente, para cada pregunta. ¿Cuántos alumnos se necesitan para garantizar que hay dos de ellos con las mismas respuestas en todo el examen?

   a) $\boxed{5^{12}+1}$ b) 2454473937 c) $7^{12}+45$ d) 900 e) Menos de 100 alumnos

   Idea para la solución: Recordar que el total de combinaciones se obtiene al multiplicar el número de opciones tantas veces como preguntas tenga el examen.

8. (OC-UAN, 2017) Cada estudiante en una clase envía diez tarjetas de amor y amistad, una a cada uno de otros diez compañeros de la clase. Se sabe que no hay dos estudiantes que envíen mutuamente tarjetas el uno al otro. ¿Cuál es el menor número de estudiantes que podría haber en la clase?

   a) 15 b) 20 c) $\boxed{21}$ d) 25 e) 30

   Idea para la solución: Realizar una representación gráfica (diagrama de árbol) remitente y destinatarios.

English Challenge

9. (COMATEQ-UNISINU, 2020). Determine the value of the variable e in the following table, such that the resulting table is a ***Magic Square*** (i.e. the sum of all its rows, columns and diagonals are equal):

1	15	14	4
a	b	7	9
c	d	11	5
e	f	g	h

Idea para la solución: Visita el solucionario del año 2020 de la COMATEQ en el siguiente link webwork-test.uprm.edu

Referencias

[1] AMT, Australian Mathematics Trust. Recuperado de www.newera.edu.my/competition/amc/en/

[2] COMATEQ, COmpetencia de MATemáticas por EQuipos. Recuperado de webwork-test.uprm.edu

[3] OC-UAN, Olimpiada Colombiana de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño. Recuperado de oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas/pruebas

[4] OM-UDEA, Olimpiadas de Matemáticas, Universidad de Antioquia. Recuperado de www.olimpiadasudea.co

[5] OMPR, Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico. Recuperado de om.pr

[6] ORM-UDENAR, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad de Nariño. Recuperado de orm.udenar.edu.co

[7] ORM-UIS, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Recuperado de matematicas.uis.edu.co

[8] ORM-UNIVALLE, Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad del Valle. Recuperado de orm.univalle.edu.co

[9] NMO, Norway Math Olympiad. Recuperado de www.matematikksenteret.no

[10] UKMT, United Kingdom Mathematics Trust. Recuperado de www.ukmt.org.uk

Comité Organizador ORM-UDENAR y Profesoras de Apoyo
E-mail: `orm@udenar.edu.co`
Página web: `http://orm.udenar.edu.co/`
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2020