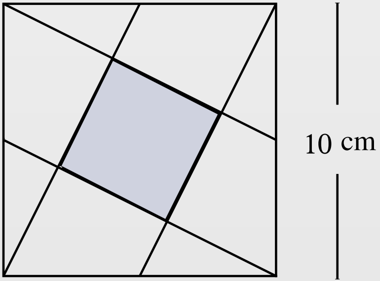
Estrategias en Solución de Problemas de Olimpiadas Matemáticas

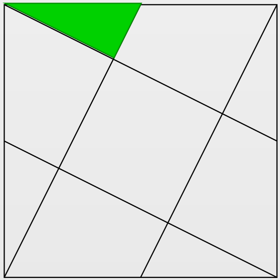
XIII Coloquio Regional de Matemáticas
Universidad de Nariño
Colombia

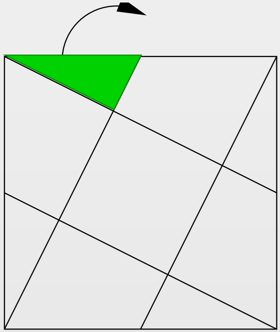
Luis F. Cáceres, Ph.D.
UPR - Mayagüez

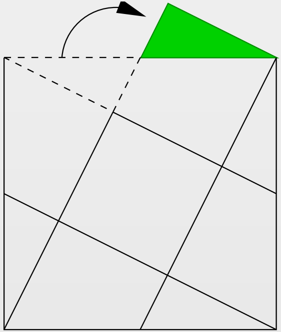
"El corazón de las matemáticas son sus propios problemas", Paul Halmos

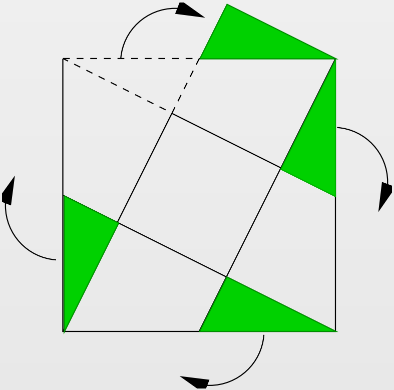
Suponga el lado del cuadrado grande mide 10 cm. Si se unen los puntos medios de los lados con los vértices, como se muestra en la figura, ¿cuál es el área del cuadrado central?

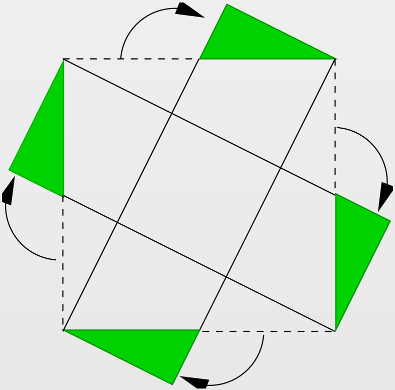


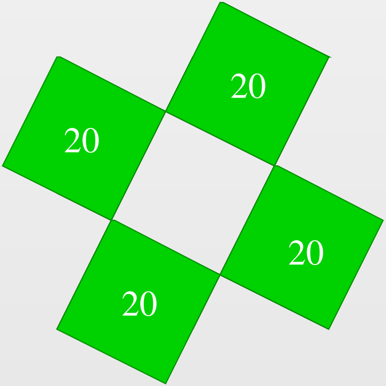


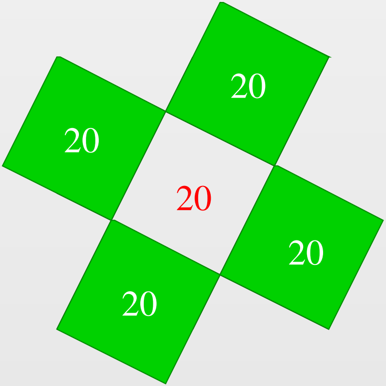









20
20
20
20


20
20
20
20
20

Fases Generales

- § Entender el Problema.
- § Trazar un Plan.
- § Ejecutar el Plan.
- § Mirar hacia atrás.

How to Solve it? Polya

Reglas Generales

- No hay sustituto para la práctica.

Reglas Generales

§ No hay sustituto para la práctica.

§ Preparación

- Lemas.
- Teoremas.
- Técnicas.

Reglas Generales

§ No hay sustituto para la práctica.

§ Preparación

- Lemas.
- Teoremas.
- Técnicas.

§ Un buen solucionador de problemas no se queda sin ideas.

Problema 2
SMO 2014

Hallar todas las parejas (x, y) de enteros tales que:

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$$

!Adivinando un Número!

19	25	32	23
9	31	1	5
41	3	27	15
29	17	11	21
7	39	37	13

!Adivinando un Número!

10	63	3	14
18	7	45	2
27	42	19	6
23	30	15	26
22	40	31	11

!Adivinando un Número!

28	30	37	31
41	5	12	23
13	20	35	4
21	7	14	22
15	29	32	6

!Adivinando un Número!

30	37	13	28
12	25	9	36
40	10	27	15
29	24	11	31
8	14	41	26

!Adivinando un Número!

35	26	21	42
19	25	28	18
22	31	23	16
29	24	20	30
17	38	27	39

Se escribe una sucesión de números naturales con la siguiente regla: se eligen los dos primeros números y a partir de entonces, para escribir un número nuevo, se calcula la suma de los últimos dos números escritos, se halla el mayor divisor impar de esta suma y la suma de este mayor divisor impar más uno es el siguiente número escrito. Los primeros números son 25 y 126 (en ese orden), y la sucesión tiene 2015 números. Hallar el último número escrito.

- **Lista:** 25, 126

$$25 + 126 = 151$$

Divisores de 151: $1, 151$

- **Lista:** 25, 126

$$25 + 126 = 151$$

Divisores de 151: $1, 151$

- **Lista:** 25, 126, 152

- **Lista:** 25, 126

$$25 + 126 = 151$$

Divisores de 151: $1, 151$

- **Lista:** 25, 126, 152

$$126 + 152 = 278$$

Divisores de 278: $1, 2, 139$

Solución Problema 3
OMPR 2015

§ **Lista:** 25, 126

$$25 + 126 = 151$$

Divisores de 151: $1, 151$

§ **Lista:** 25, 126, 152

$$126 + 152 = 278$$

Divisores de 278: $1, 2, 139$

§ **Lista:** 25, 126, 152, 140

25	126	152	140	74	108	92	26
60	44	14	30	12	22	18	

Solución Problema 3
OMPR 2015

25	126	152	140	74	108	92	26
60	44	14	30	12	22	18	6
4	6	6	4	6	6	4	...

$$\begin{array}{cccccccc} 25 & 126 & 152 & 140 & 74 & 108 & 92 & 26 \\ 60 & 44 & 14 & 30 & 12 & 22 & 18 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & \dots \end{array}$$

$2015 - 15 = 2000$

Solución Problema 3
OMPR 2015

25	126	152	140	74	108	92	26
60	44	14	30	12	22	18	6
4	6	6	4	6	6	4	$\dots$

$$2015 - 15 = 2000$$

$$2000 = 3 \cdot 666 + 2$$

Solución Problema 3

OMPR 2015

25	126	152	140	74	108	92	26
60	44	14	30	12	22	18	6
4	6	6	4	6	6	4	$\dots$

$$2015 - 15 = 2000$$

$$2000 = 3 \cdot 666 + 2$$

Respuesta: 4

Encontrar todos los enteros positivos n tales que $2^n - 1$ es divisible entre 7.

n	$2^n - 1$	Residuo al dividir por 7
1	1	1
2	3	3
3	7	0
4	15	1
5	31	3
6	36	0
7	127	1
8	255	3
9	511	0
10	1023	1

n	$2^n - 1$	Residuo al dividir por 7
1	1	1
2	3	3
3	7	0
4	15	1
5	31	3
6	36	0
7	127	1
8	255	3
9	511	0
10	1023	1

Conjetura: Múltiplos de 3

n	$2^n - 1$	Residuo al dividir por 7
1	1	1
2	3	3
3	7	0
4	15	1
5	31	3
6	36	0
7	127	1
8	255	3
9	511	0
10	1023	1

Conjetura: Múltiplos de 3

Prueba por inducción.

Sean a_n y b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ dos sucesiones de enteros definidas por $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ y para $n \geq 1$ tenemos

$$a_{n+1} = 7a_n + 12b_n + 6 \qquad \text{y} \qquad b_{n+1} = 4a_n + 7b_n + 3$$

Probar que a_n^2 es la diferencia de dos cubos.

$$a_1 = 1 \qquad\qquad b_1 = 0$$

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 0$$

$$a_2 = 13 \qquad b_2 = 7$$

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 0$$

$$a_2 = 13 \qquad b_2 = 7$$

$$a_3 = 181 \qquad b_3 = 104$$

Solución Problema 5

SMO 2010

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 0$$

$$a_2 = 13 \qquad b_2 = 7$$

$$a_3 = 181 \qquad b_3 = 104$$

$$a_n^2 = (b_n + 1)^3 - b_n^3$$

Dados dos números enteros no negativos m, n, con $m > n$, se dirá que m termina en n si es posible borrar algunos dígitos de izquierda a derecha de m para obtener n. Por ejemplo, 329 termina en 9 y en 29, únicamente. Determine cuántos números de tres dígitos terminan en el producto de sus dígitos.

Solución Problema 6
Centro 2007

100	Producto	0	✓
101	Producto	0	No
102	Producto	0	No
103	Producto	0	No
104	Producto	0	No
105	Producto	0	No
106	Producto	0	No
107	Producto	0	No
108	Producto	0	No
109	Producto	0	No
110	Producto	0	✓
111	Producto	1	✓
112	Producto	2	✓
113	Producto	3	✓
114	Producto	4	✓
115	Producto	5	✓
116	Producto	6	✓
117	Producto	7	✓
118	Producto	8	✓
119	Producto	9	✓
120	Producto	0	✓
121	Producto	2	No

. . .

Problema 7
Kürschák 1974

Probar que si todo elemento, comenzando desde el segundo, en una sucesión infinita de números naturales es igual a la media armónica de sus vecinos, entonces todos los elementos de la sucesión son iguales.

Modificación al Problema 7
Kürschák 1968

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números naturales tal que $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ es una sucesión aritmética, entonces todos los a_n son iguales.

Probar que si a, b, c son números reales positivos, entonces:

$$a^a b^b c^c > (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

Se puede demostrar fácilmente que esta desigualdad es equivalente a:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}} \geq 1$$

Por la simetría es suficiente probar que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \geq 1$$

Problema 9
China 1988

Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & \text{si} \quad a_{n+1}a_n \text{ es par} \\ a_{n+1} - a_n & \text{si} \quad a_{n+1}a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Probar que para todo número natural n, $a_n \neq 0$

Calculando los primeros términos se observa el patrón:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
impar	par	impar	impar	par
a_6	a_7	a_8	a_9	
impar	impar	par	impar	...

Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es par} \\ a_{n+1} - a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Solución Problema 9
China 1988

Calculando los primeros términos se observa el patrón:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
impar	par	impar	impar	par
a_6	a_7	a_8	a_9	
impar	impar	par	impar	...

Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es par} \\ a_{n+1} - a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Sea m el primer valor tal que $a_m = 0$.

Solución Problema 9

China 1988

Calculando los primeros términos se observa el patrón:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
impar	par	impar	impar	par
a_6	a_7	a_8	a_9	
impar	impar	par	impar	...

Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es par} \\ a_{n+1} - a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Sea m el primer valor tal que $a_m = 0$.

$$a_m = a_{m-1} - a_{m-2}$$

Calculando los primeros términos se observa el patrón:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
impar	par	impar	impar	par
a_6	a_7	a_8	a_9	
impar	impar	par	impar	...

Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es par} \\ a_{n+1} - a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Sea m el primer valor tal que $a_m = 0$.

$$\begin{aligned} a_m &= a_{m-1} - a_{m-2} \\ &= 5a_{m-2} - 3a_{m-3} - a_{m-2} \end{aligned}$$

Solución Problema 9
China 1988

Calculando los primeros términos se observa el patrón:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
impar	par	impar	impar	par
a_6	a_7	a_8	a_9	
impar	impar	par	impar	...

Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es par} \\ a_{n+1} - a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Sea m el primer valor tal que $a_m = 0$.

$$\begin{aligned} a_m &= a_{m-1} - a_{m-2} \\ &= 5a_{m-2} - 3a_{m-3} - a_{m-2} \\ &= 4a_{m-2} - 3a_{m-3} \end{aligned}$$

Solución Problema 9
China 1988

Calculando los primeros términos se observa el patrón:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
impar	par	impar	impar	par
a_6	a_7	a_8	a_9	
impar	impar	par	impar	...

Si $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es par} \\ a_{n+1} - a_n & \text{si } a_{n+1}a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Sea m el primer valor tal que $a_m = 0$.

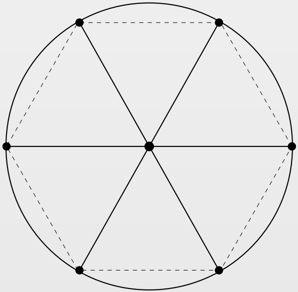
$$\begin{aligned} a_m &= a_{m-1} - a_{m-2} \\ &= 5a_{m-2} - 3a_{m-3} - a_{m-2} \\ &= 4a_{m-2} - 3a_{m-3} \end{aligned}$$

Esto prueba que a_{m-3} es múltiplo de 4. Por lo tanto también $a_{m-6}, a_{m-9}, \ldots, a_2$. Contradicción.

Problema 10

Se seleccionan seis puntos dentro del círculo unitario. Probar que hay dos puntos que están a una distancia de a lo más 1.

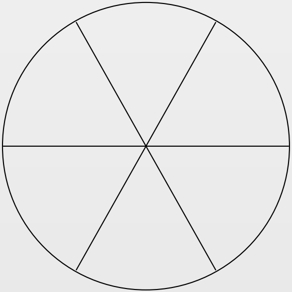
Solución Problema 10



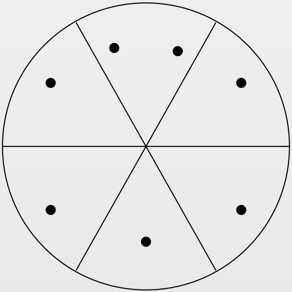
Solución Problema 10

¡Si fueran 7 puntos sería fácil!

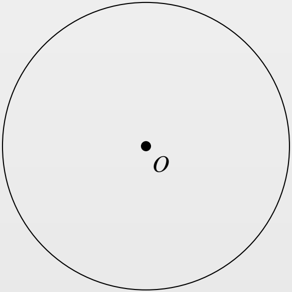
Solución Problema 10



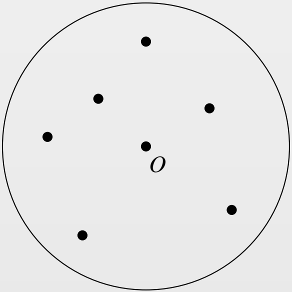
Solución Problema 10



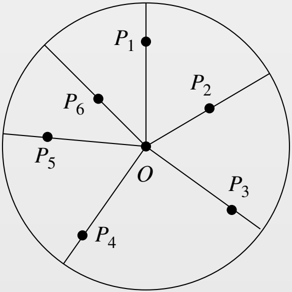
Solución Problema 10



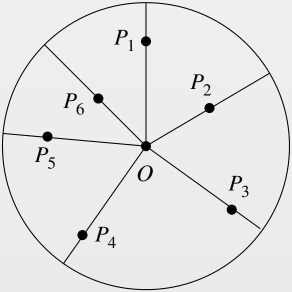
Solución Problema 10



Solución Problema 10

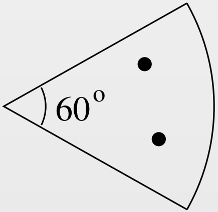


Solución Problema 10

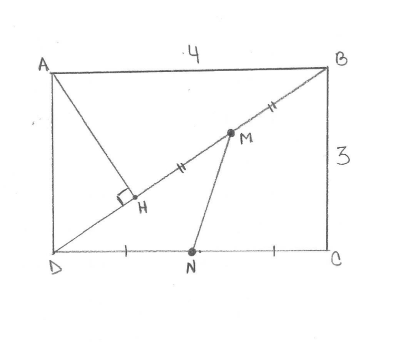


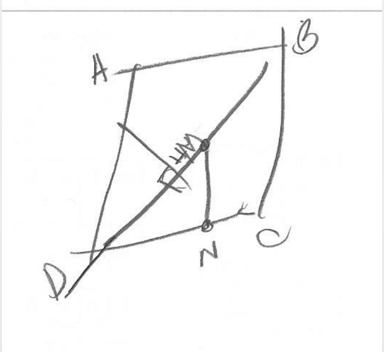
$$min\sphericalangle P_iOP_{i+1} \leq 60^\circ$$

Solución Problema 10



Hacer un Buen Dibujo
En Geometría





¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $12 = a + b + c$, donde a, b y c son enteros no negativos?

$$12 = 9 + 2 + 1$$

$$12 = 8 + 0 + 4$$

Solución Problema 11

Hacer un Dibujo

Solución Problema 11
Hacer un Dibujo

Solución Problema 11

Hacer un Dibujo

Solución Problema 11
Hacer un Dibujo

Solución Problema 11
Hacer un Dibujo

Solución Problema 11

Hacer un Dibujo

8 0 4

Solución Problema 11

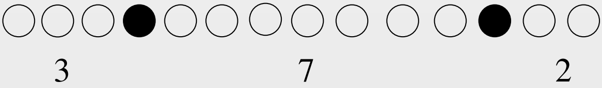
Hacer un Dibujo

Solución Problema 11
Hacer un Dibujo

Solución Problema 11
Hacer un Dibujo

Solución Problema 11
Hacer un Dibujo

Solución Problema 11
Hacer un Dibujo



Solución Problema 11
Hacer un Dibujo

$$\frac{14!}{2! \cdot 12!}$$

Dos jugadores A y B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar dicha extrategia.

Algunas Estrategias

- Hacer un buen dibujo
- Introducir notación apropiada, elementos auxiliares
- Examinar casos especiales, casos extremos
- Modificar el problema a uno equivalente
- Explorar problemas análogos, mas simples, similares.
- Trabajar hacia atras
- Argumentar por contradicción o contrarecíproco
- Descomponer y recombinar
- Generalizar
- Particularizar
- Explorar simetría y paridad
- Invarianza

¡Bienvenidos a Mayagüez, Puerto Rico!